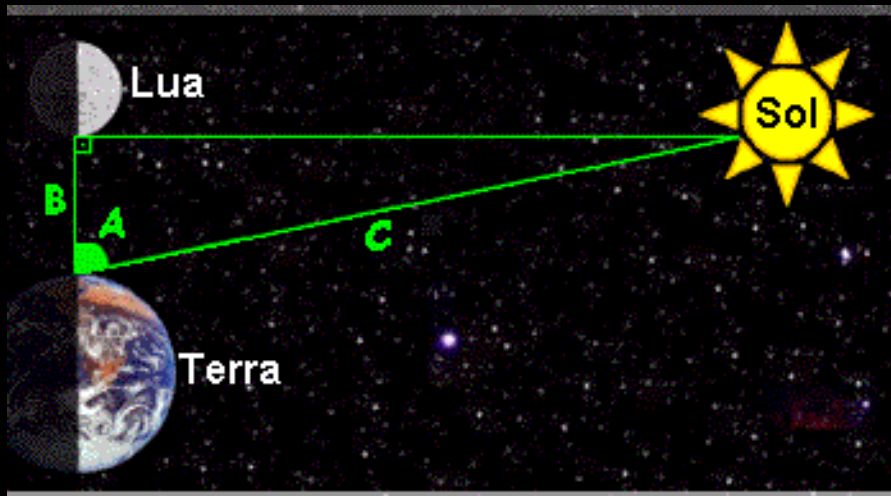




Prof. Edcarlos Pereira

TRIGONOMETRIA E SUAS APLICAÇÕES. PARTE 2



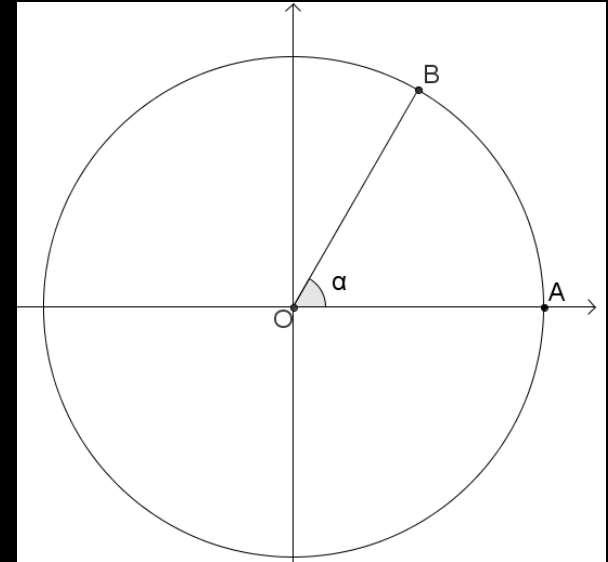
Introdução

Estudamos o seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Agora, iremos estender estes conceitos na circunferência trigonométrica.



Situação-problema

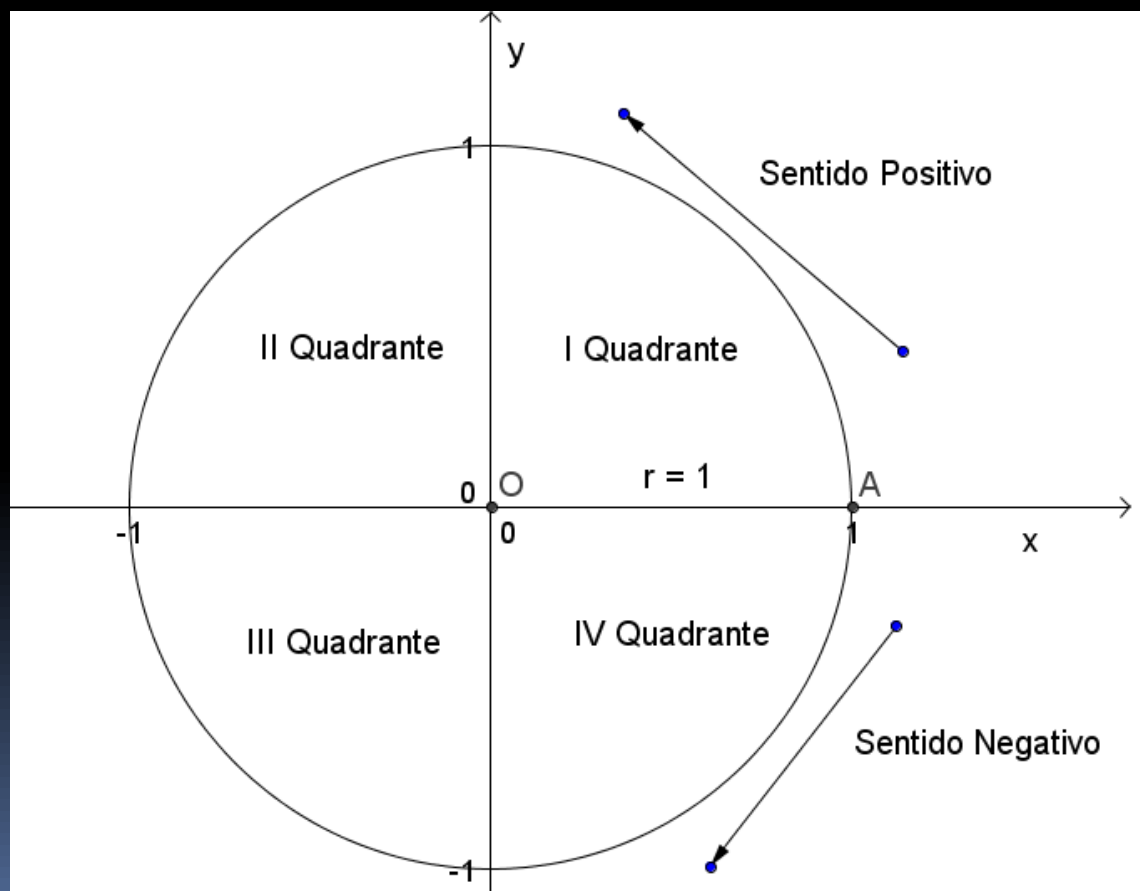
No plano da órbita circular de um satélite ao redor da Terra é associado um sistema cartesiano cuja unidade adotada nos eixos é o quilômetro, e a origem O é o centro da Terra e também a órbita, conforme mostra o esquema ao lado, em que $A(900,0)$



Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção da órbita com os eixos cartesianos? Sabendo que em um determinado instante a posição do satélite é o ponto $B(450, 450\sqrt{3})$, determine a medida α do ângulo agudo $\widehat{AOB}$.

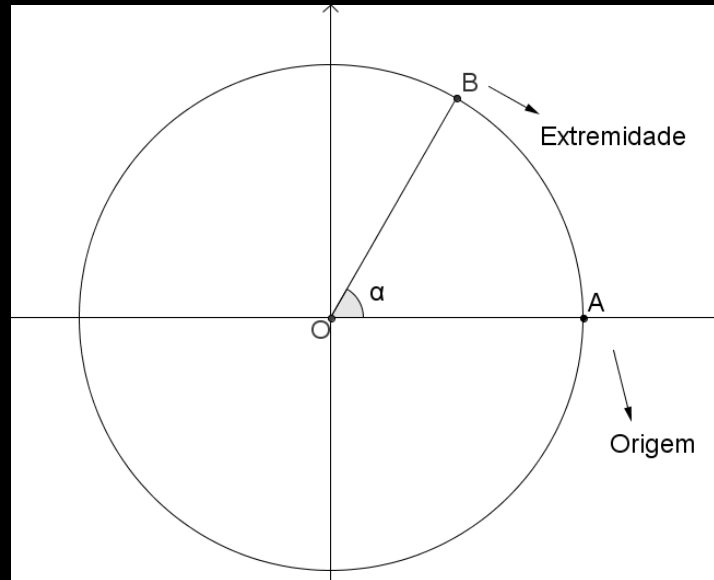
Circunferência Trigonométrica

Denomina-se circunferência trigonométrica a circunferência orientada cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.



Arcos Côngruos (congruentes)

Todos os arcos no círculo trigonométrico possuem determinações, isto é, tem origem e extremidade.



Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de arcos côngruos.

Exemplos:

a) O arco de 30° ($\pi/6$) é congruente ao arco de 390° ($13\pi/6$), isto é $30^\circ \equiv 390^\circ$.

b) O arco de 45° ($\pi/4$) é congruente ao arco de 405° ($9\pi/4$), isto é $45 \equiv 405$.

c) O arco de 60° ($\pi/3$) é congruente ao arco de 420° ($7\pi/3$), isto é $60 \equiv 420$.

Formula geral do arcos cômruos

Se um arco mede α graus, podemos expressar todos os arcos cômruos a ele da seguinte forma: $\alpha + 360^\circ.k$, $k \in \mathbb{Z}$. Caso a medida do ângulo do arco seja dada em radianos, representamos por: $\alpha + 2\pi.k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica

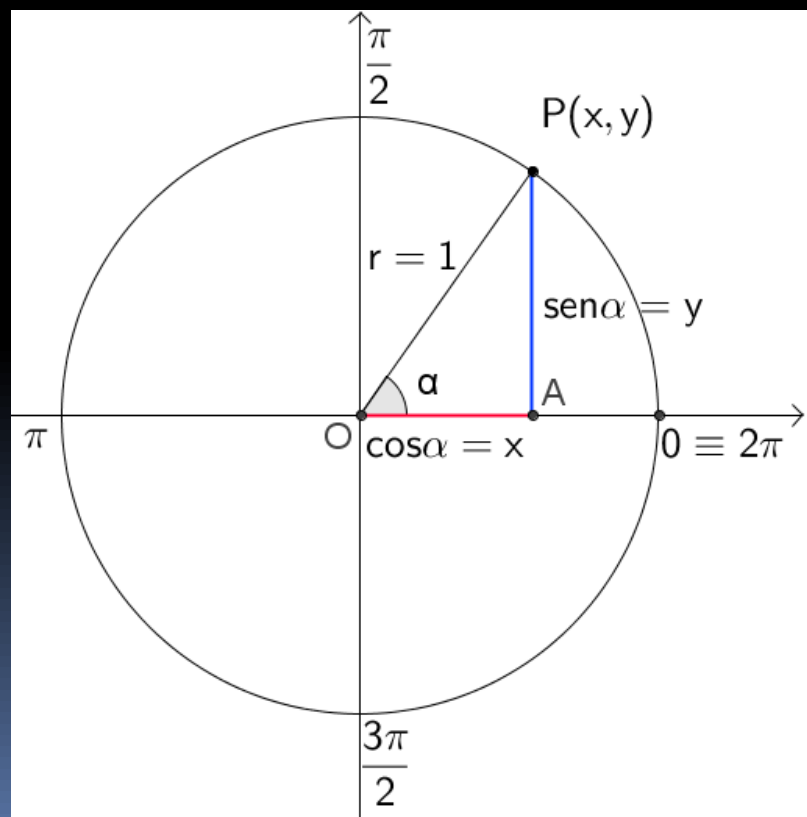
Consideremos $P(x,y)$ um ponto da circunferência trigonométrica, ponto extremo do arco de medida α rad. Nessas condições, definimos:

$$\text{sen } \alpha = y$$

$$\text{cos } \alpha = x$$

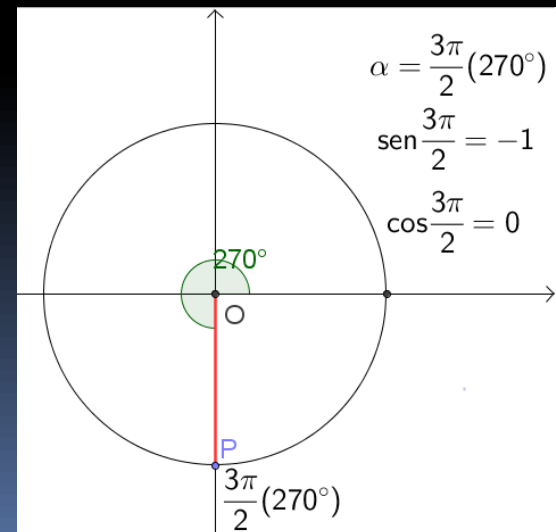
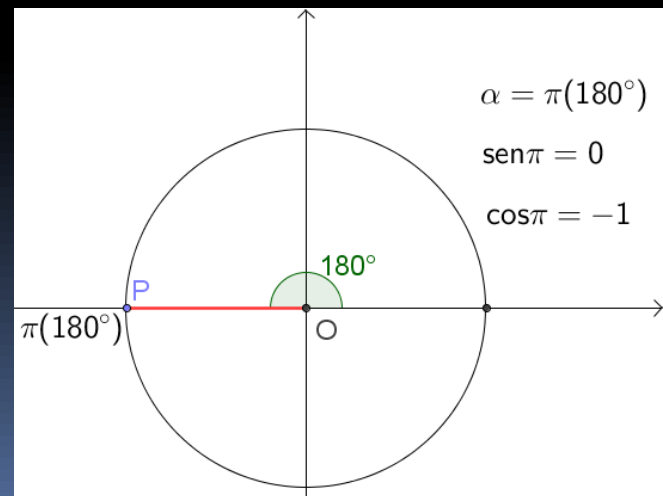
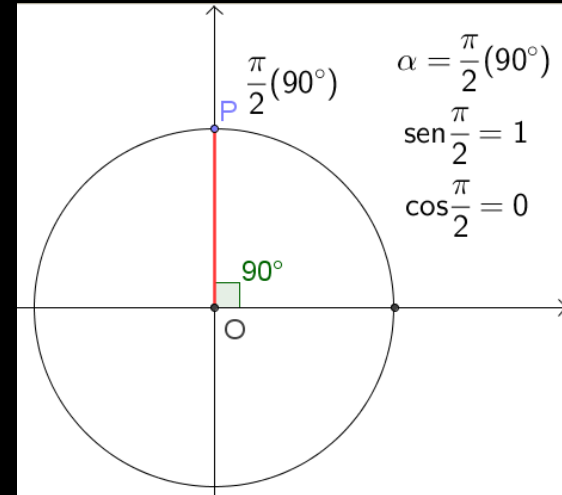
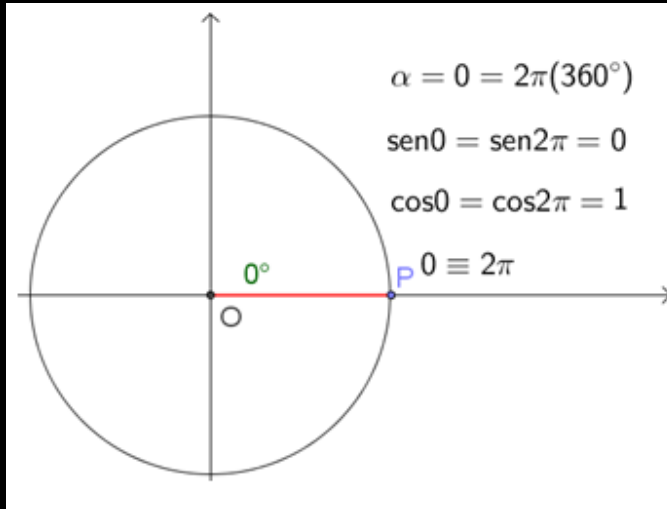
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}, \quad (\text{com } \alpha \neq 0)$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$



Valores notáveis do seno e do cosseno

Observe nas figuras a seguir nos arcos $0 \equiv 2\pi$, $\pi/2$, π e $3\pi/2$.

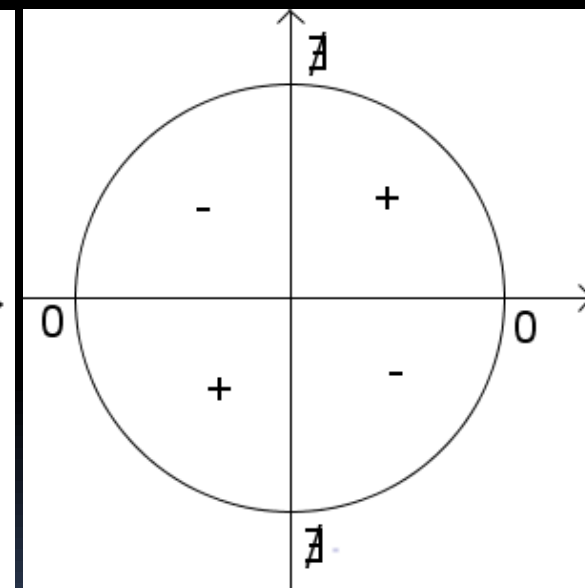
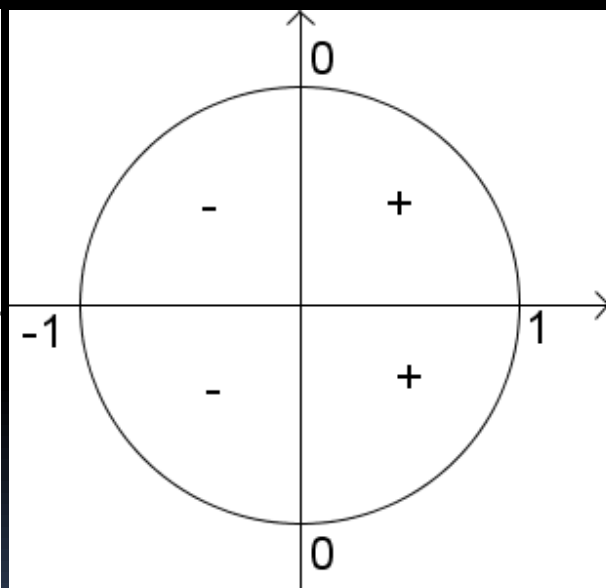
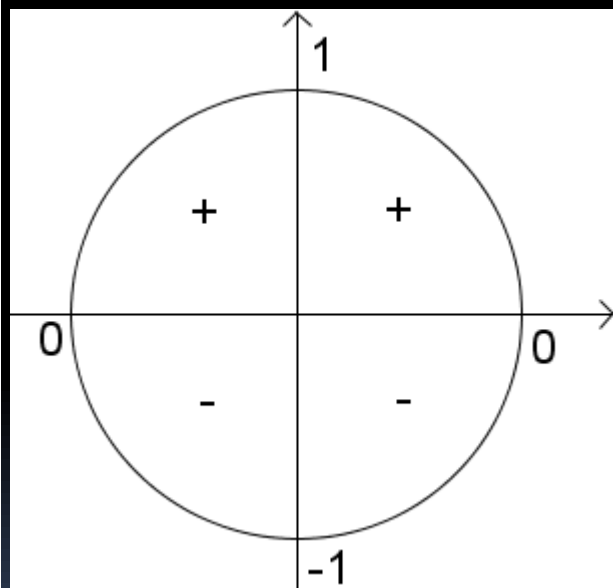


Sinais do seno, cosseno e tangente.

SENO

COSSENO

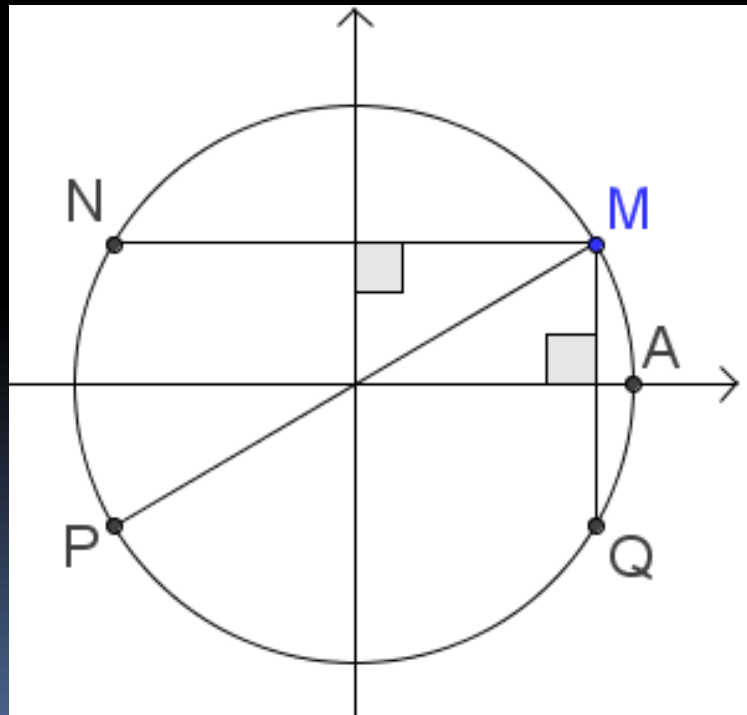
TANGENTE



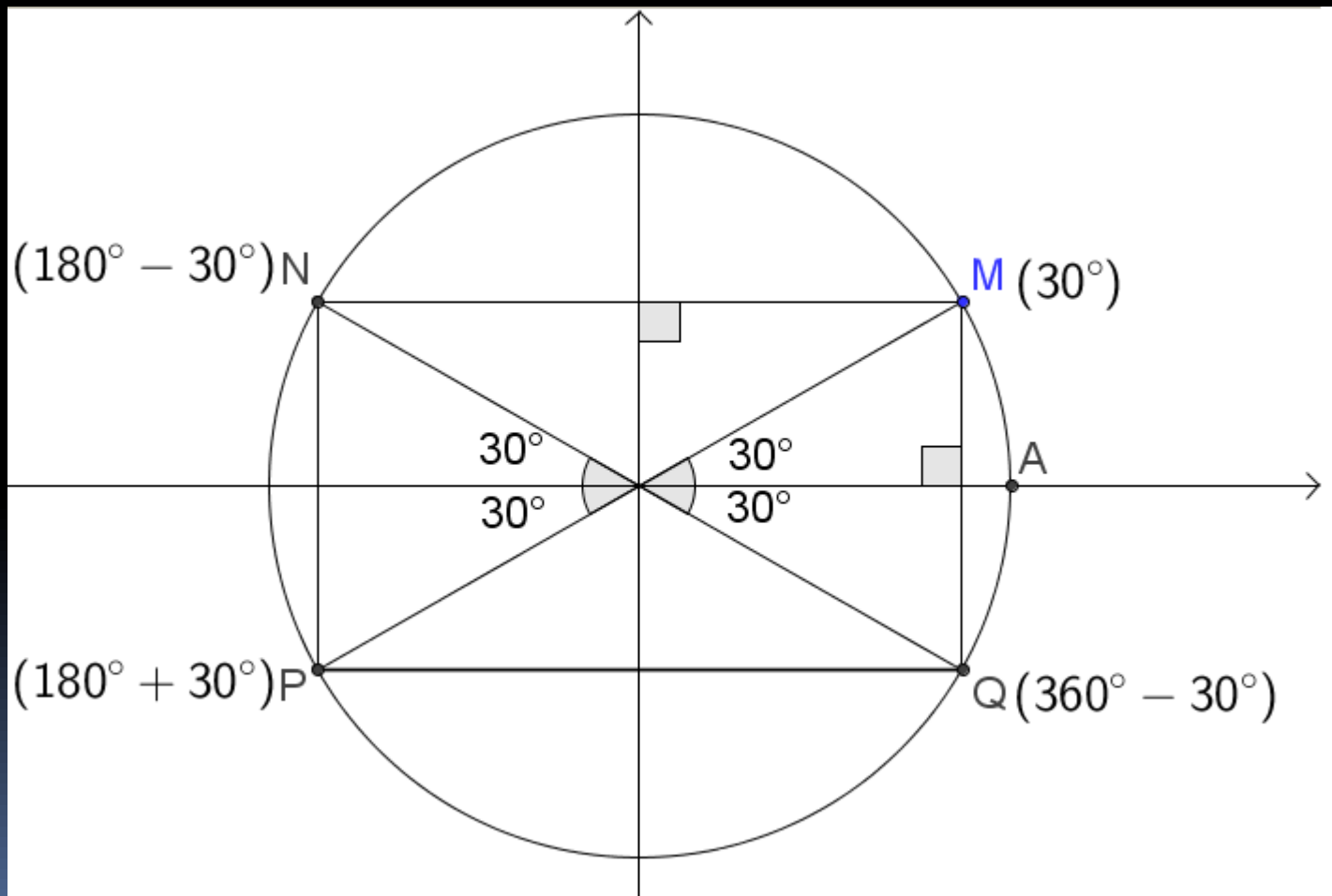
Simetrias

Dado um ponto M , na circunferência, podemos encontrar três pontos (N , P , Q) simétricos ao ponto M .

Veja o esquema abaixo:

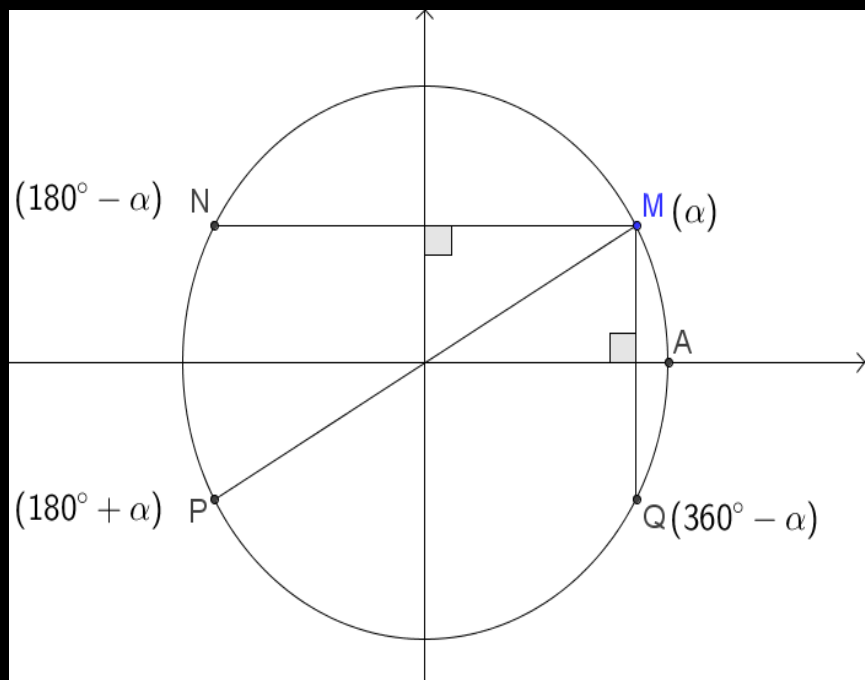


Se o ponto M é a extremidade do arco AM medindo 30° .
Então, temos:

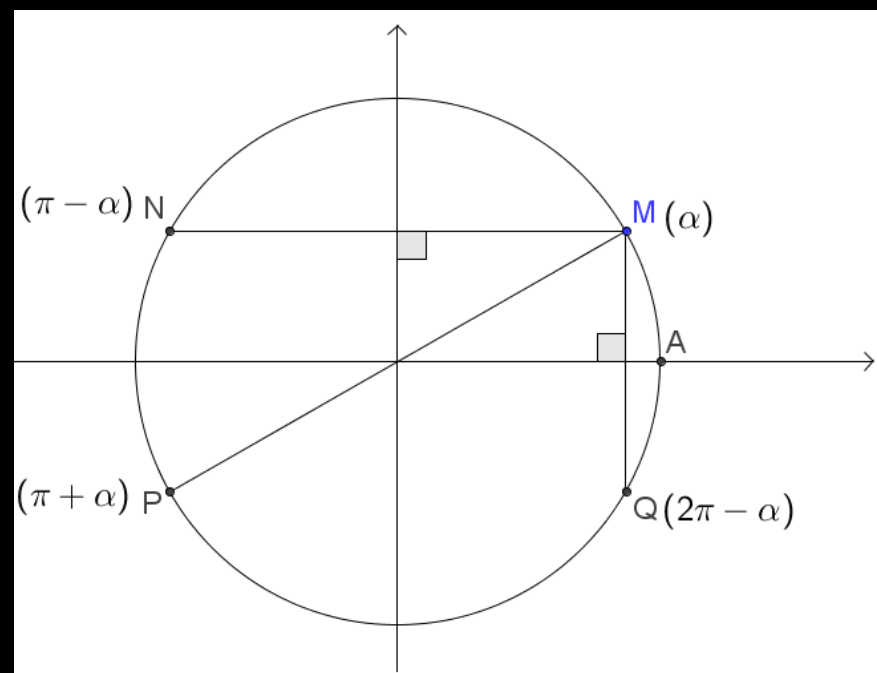


Generalizando, temos:

Sendo α uma medida
em grau.



Sendo α uma medida
em radiano.



Redução ao 1 Quadrante do seno e do cosseno

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

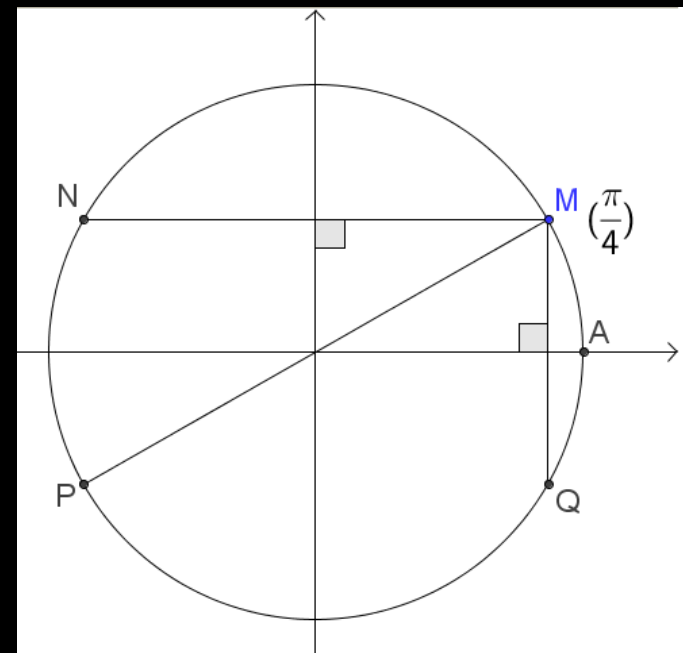
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

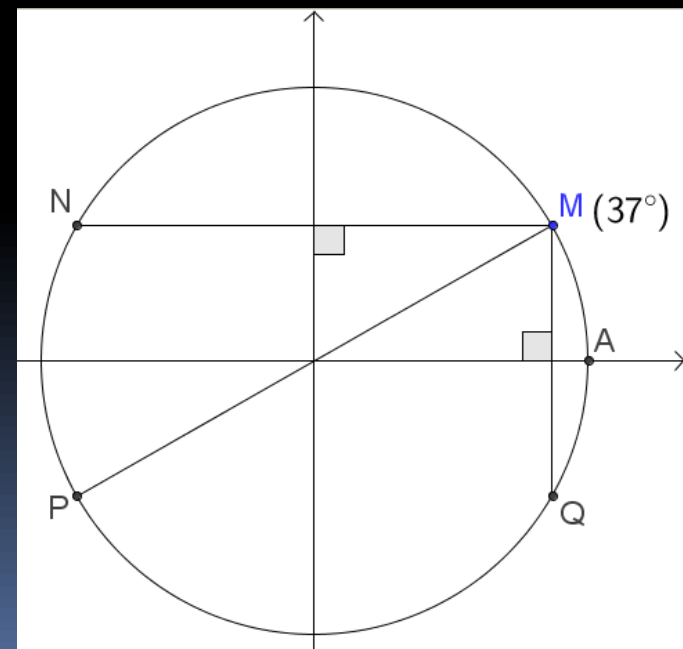
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

Exemplos:

1. O ponto M da figura está associado à medida $\pi/4$ rad. Determine as medidas x (com $0 \leq x \leq 2\pi$) associados aos pontos N, P e Q.



2. O ponto M, da circunferência trigonométrica ao lado, está associado à medida 37° . Determine as medidas x (com $0 \leq x \leq 360^\circ$) associados aos pontos N, P e Q.



Equações trigonométricas

Equações do tipo $\operatorname{sen} x = k$, $\operatorname{cos} x = k$ ou $\operatorname{tg} x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de equações trigonométricas imediatas.

Exemplos:

1. Determine x nos casos seguintes:

a) $0 \leq x < 360$ tal que $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $0 \leq x < 2\pi$ tal que $\operatorname{cos} x = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = -1$

d) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{tg} x = 1$

Adição de arcos e arcos duplos

Fórmulas de adição de arcos

$$I) \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sena} \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$II) \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sena} \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$III) \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen} b$$

$$IV) \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen} b$$

$$V) \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$VI) \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

Exemplos:

1) Calcular $\cos 15^\circ$.

2) Calcular $\sin 105^\circ$.

3) (UFPR) A expressão $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

é equivalente a :

a) $2 \cos x$

d) $\sin x - \cos x$

b) $\cos x$

e) $\cos x - \sin x$

c) $\sin x + \cos x$

Funções Trigonométricas

Dado um número real x , podemos associar a ele o valor do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo (ou arco) de x radianos.

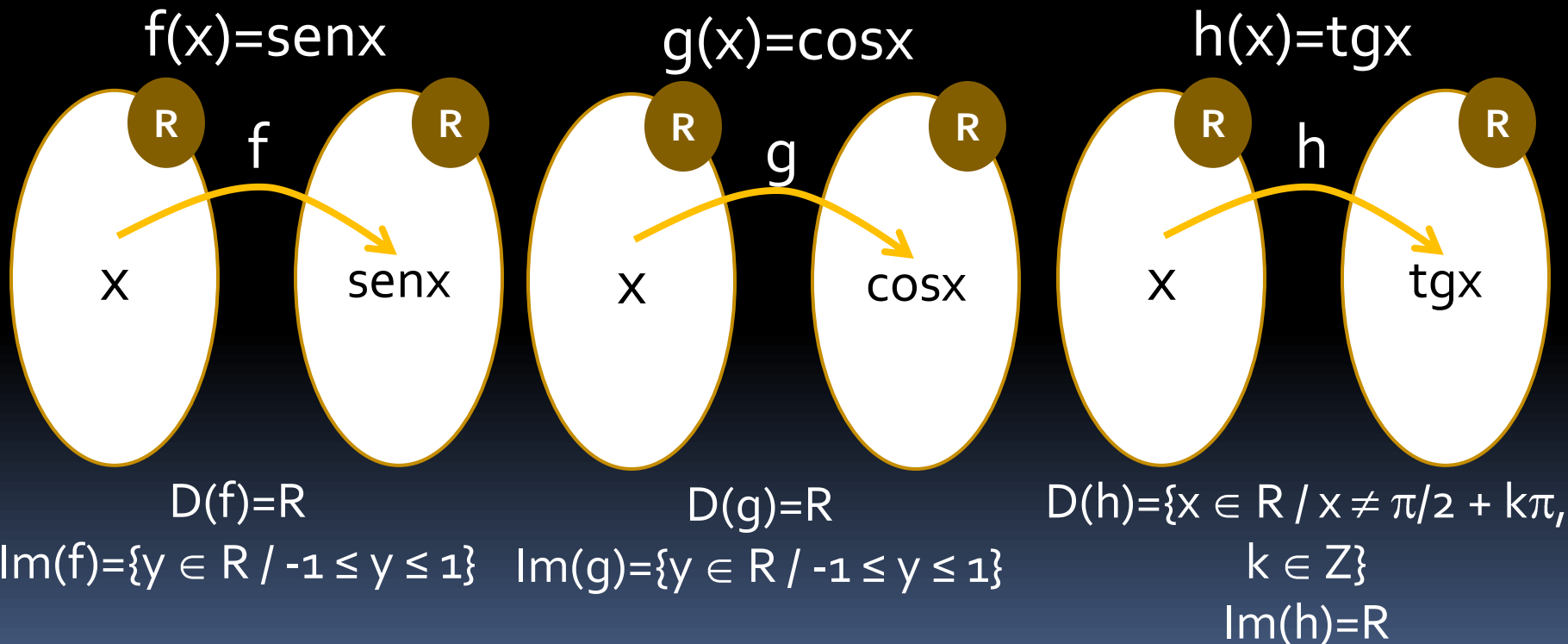
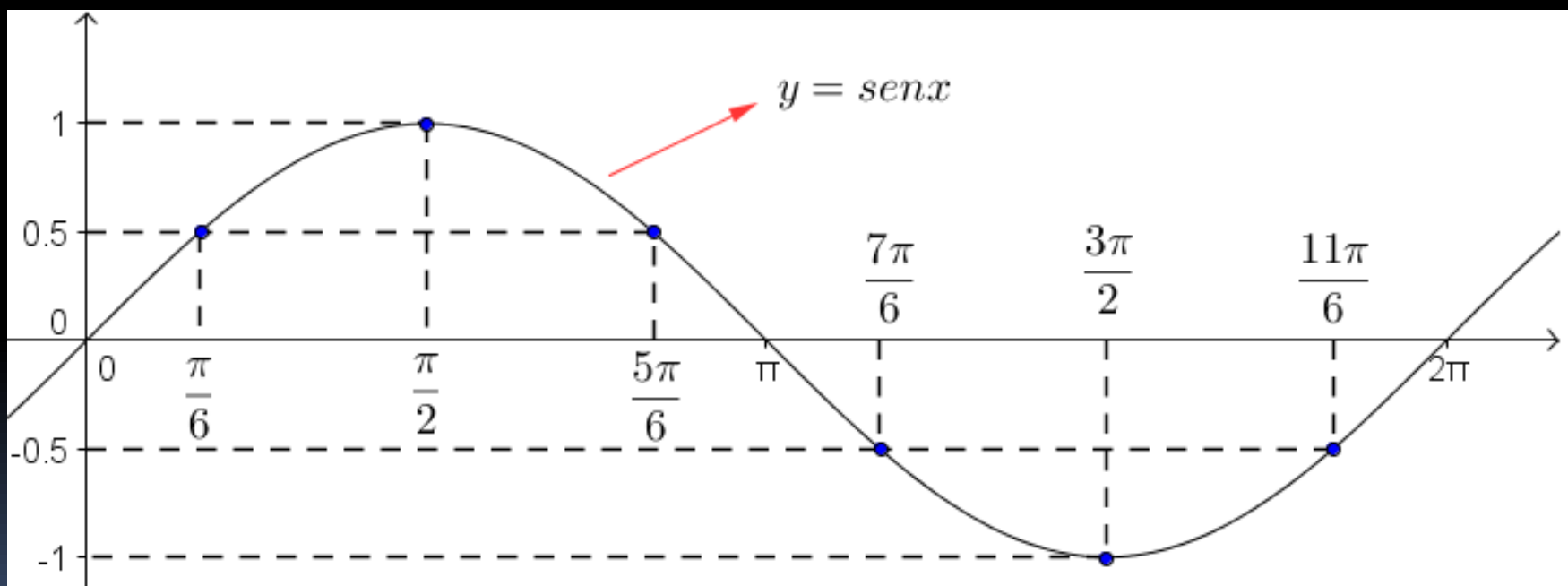


Gráfico da função $f(x)=\text{sen}x$

Veja abaixo o gráfico da função seno:

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$3\pi/2$	$11\pi/6$	2π
y=senx	0	0,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-0,5	0



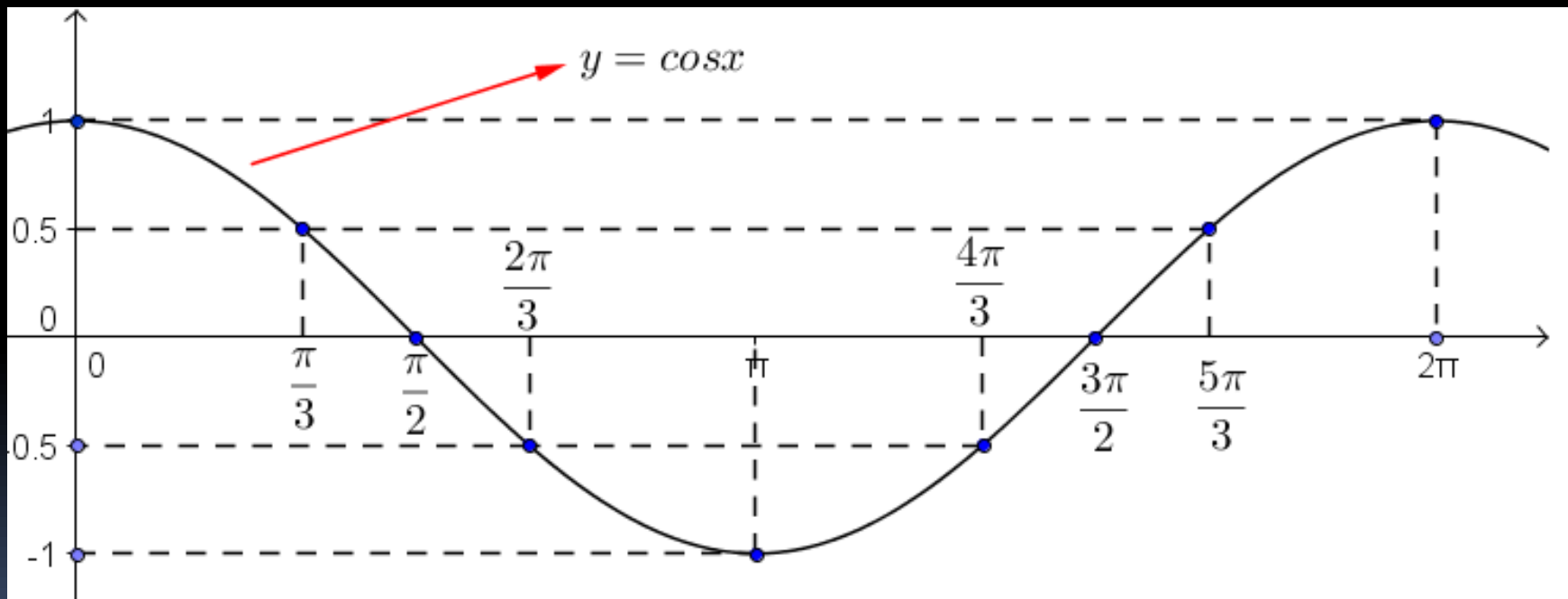
$$D(f)=\mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$$

Gráfico da função $g(x)=\cos x$

Veja abaixo o gráfico da função cosseno:

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π
$y=\cos x$	1	0,5	0	-0,5	-1	-0,5	0	0,5	1



$$D(g)=\mathbb{R}$$

$$\text{Im}(g)=\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$$

Período das funções seno e cosseno

Sejam as funções trigonométricas:
 $y=a+b\cdot\text{sen}(mx+q)$ ou $y=a+b\cdot\text{cos}(mx+q)$, em
que a , b , m e q são números reais, com $b\neq 0$ e
 $m\neq 0$, o período é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|m|}$$

Exemplos:

a) O período da função $y=3+2\cdot\text{sen}(2x+4)$ é π ,
pois:

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

b) O período da função $y=2\cdot\text{cos}(-4x+1)$ é $\pi/2$,
pois:

$$p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Resoluções de Problemas

1) (Unifor-CE) O arco α mede 7.632° . O arco β , tal que $0 < \beta < 360^\circ$, é côngruo a α . A medida de β , em radianos, é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{2\pi}{5}$ e) $\frac{2\pi}{7}$

2) (Unicamp-SP) O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá $1/4$ de volta em um mostrador graduado de 0° a 360° . No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição 0° . Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?

a) 270 b) 160 c) 220 d) 140 e) 20

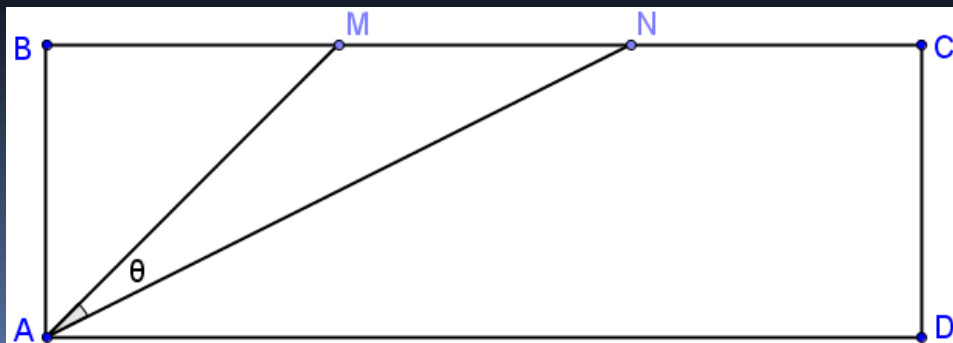
3) (PUC-MG) Os ângulos (em graus) θ entre 0 e 360 para os quais $\sin\theta = \cos\theta$.

- a) 45 e 90 b) 45 e 225 c) 180 e 360
d) 45 , 90 e 180 e) 90 , 180 e 270

4) (UFP/PSE) Sabendo que $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, podemos afirmar que $\sin 2x$ é:

- a) $\frac{13}{16}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{\sqrt{13}}{16}$ d) $-\frac{13}{16}$ e) $\frac{3}{4}$

5) (UFMS) A figura abaixo mostra um retângulo ABCD onde $AB=BM=MN=NC$. Calcule $6\operatorname{tg}\theta+51$.



6) (Ufam) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 4x \cdot \cos 2x + \sin 4x \cdot \sin 2x$. Então o seu período em radianos é:

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 2π d) π e) $\frac{\pi}{3}$

7) Construa os gráficos das funções abaixo e determine seu período, domínio e imagem:

a) $f(x) = 3 \cdot \sin x$

b) $f(x) = 1 + \cos x$

c) $f(x) = -2 + \cos 4x$

8) (Vunesp - Modificado) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right)$$

em que t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t=0$) e $P(t)$ é a profundidade da água (em metros) no instante t . Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta e qual é a sua profundidade?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.
- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.