Edcarlos Pereira

POLINÔMIOS, EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E SUAS APLICAÇÕES.

Introdução

Na economia, há situações em que as empresas buscam expandir a capacidade de reprodução, aumentando a quantidade de produtos e diminuindo o custo de cada um. Esse processo é chamado de economia de escala. Existem funções que são capazes de traduzir essa situação.

Um exemplo é a fábrica de bicicletas, que modelou o custo diário de certo modelo de bicicleta pela função $C(x) = 0{,}02x^3 + 50x + 4.000$, para $1 \leq x \leq 40$, em que $C(x)$ indica o custo diário, em real, para a fabricação de x unidades de uma bicicleta.

Situação-problema

Uma vendedora de uma loja de roupas recebe salário fixo de R$ 500,00 e comissão de 2% sobre o total de vendas no mês. Representando por x o total de vendas em um mês. Qual a expressão que representa o salário da vendedora?

Definição:

Um polinômio na variável complexa x é uma expressão dada por:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$$

são números complexos chamados coeficientes do polinômio; a_0 é o coeficiente independente do polinômio.

n é um número natural.

o grau do polinômio é o número natural correspondente ao maior expoente de x, com coeficiente não nulo.

Exemplos:

$a)\ 4x^3 - 5x^2 - 7$ é um polinômio de grau 3.

$b)\ \frac{-1}{6}x^5 + x^2 - 3x + 1$ é um polinômio de grau 5.

$c)\ 2ix^2 + x - 2$ é um polinômio de grau 2.

$d)\ x - 2$ é um polinômio de grau 1.

$e)\ 7$ é um polinômio de grau 0.

$e)\ 0$ não se definir grau de polinômio nulo.

$f)\ x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} + 1$ não é um polinômio, pois o expoente x não podem ser negativo e nem fracionário.

Função polinomial

Você já estudou funções polinomiais de domínio real. Agora vamos estudar essas funções para o domínio complexo.

Polinômio ou função polinomial na variável x é toda função P: C $\rightarrow$ C definida por

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

para todo x $\in$ C, sendo n $\in$ IN e $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ números complexos.

Exemplos:

f(x) = 2x -1 é uma função polinomial de grau 1.

g(x) = x^4 - ix^2 é uma função polinomial de grau 4.

p(x) = 5 é uma função polinomial de grau 0.

Valor numérico de um polinômio

Considere um polinômio $p(x)$ e um número real α.

O Valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$ é um número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $p(\alpha)$.

Exemplos:

1) O valor numérico de $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ par $x = 4$ é: $p(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 5 = 32 - 12 + 5 = 25$
2) Dado $p(x) = 3x^2 - 7$, então para $x = i$, o valor numérico de $p(x)$ é $p(i) = 3(i)^2 - 7 = -3 - 7 = -10$.

Igualdade de polinômios

Dizemos que dois polinômios são iguais ou idênticos se, e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \in C$.

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha)$ (qualquer que seja $\alpha \in C$)

Para que isso aconteça, sua diferença $p(x) - q(x)$ deve ser nula. Assim, dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais se, e somente se, têm coeficientes dos termos de mesmo grau todos iguais.

Exemplo:

Dados os polinômios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = 2x^3 + 5x^2 – 4x + 3$, temos:

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow a = 2, b = 5, c = -4$ e $d = 2$.

Raiz de um polinômio

Já sabemos que $p(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$.

Se um número complexo α é tal que $p(\alpha) = 0$, então esse número α é chamado de raiz do polinômio $p(x)$.

Exemplos:

1) Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

$p(5) = 0 \Rightarrow 5$ é raiz de $p(x)$

$P(3) = -2 \Rightarrow 3$ não é raiz de $p(x)$

2) O número i é raiz do polinômio $p(x) = x^2 + 1$, pois $p(i) = -1 + 1 = 0$.

Operação com polinômios

Por meio de exemplos, vamos retornar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

Exemplos:

1) Se $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x – 5$, temos:

$p(x) + q(x) = 3x^2 + 2x - 1 -x^3 + 4x^2 - 2x – 5 = -x^3 + (3+4)x^2+(2-2)x + (-1 -5)= -x^3 +7x^2 - 6$

2) Se $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 - 3x + 4$, temos:

$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 -x^3 + 5x^2 - 3x + 4 =$

$= (3-5)x^2 + (-4+3)x + (1-4) = -2x^2 - x - 3$

3) Dado $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, temos:

$7 \cdot p(x) = 7 \cdot (2x^3 - 4x^2 + 5x – 3) =$

$= 14x^3 - 28x^2 + 35x – 21$

4) Dado $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = -2x + 5$, temos:

$p(x) \cdot q(x) = (3x - 4) \cdot (-2x + 5) = -6x^2 + 15x + 8x - 20 =$

$= -6x^2 + 23 - 20$

Divisão de polinômios

Dados dois polinômios p(x) e h(x), com h(x) não nulo, dividir p(x) por h(x) significa encontrar dois polinômios q(x) e r(x) que satisfaçam as seguintes condições:

1ª) $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$

2ª) o grau de r(x) é menor que o grau de h(x) ou $r(x) = 0$.

Assim, dizemos que:

p(x) é dividendo; h(x) é o divisor, q(x) é o quociente e r(x) é o resto.

Observação: Para efetuar a divisão de polinômios usaremos o método da chave, semelhante ao empregado para números inteiros.

Exemplos:

1) Veja, passo a passo, a divisão de $p(x) = x^2 - 5x + 6$ por $h(x) = x - 3$

1º passo: Dividimos o termo de maior grau de p(x) pelo o termo de maior grau de h(x):

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \hline & x \end{array}$$

2º passo: Multiplicamos o quociente obtido x por h(x) e subtraímos de p(x), isto é, somamos p(x) com o oposto do resultado obtido.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \cline{3-3} + & -x^2 + 3x & x \\ \cline{2-2} & -2x + 6 & \end{array}$$

3º passo: Repetimos o procedimento anterior com o resto parcial obtido até que o grau do resto se torne menor que o grau do divisor (ou o resto seja o polinômio nulo):

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 - 5x + 6 & x - 3 \\ \cline{3-3}
+ & \underline{-x^2 + 3x } & x - 2 \\
 & -2x + 6 & \\
 & \underline{2x - 6} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Daí, $q(x) = x - 2$

$r(x) = 0$

Observe que $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$. De fato:

$$= (x - 3) \cdot (x - 2) + 0$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

Acompanhe no quadro a solução do exemplo abaixo:

2) Efetuar a divisão de $p(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por $h(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

Divisão por (x-a): dispositivo prático de Briot-Ruffini

Esse método utiliza apenas os coeficientes do dividendo p(x) e o valor de a, que é a raiz do divisor (x – a).

Observe a seguir como devem ser arranjados os coeficientes nesse dispositivo:

raiz do divisor

Coeficientes do dividendo

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-2} & \cdots & q_1 & q_0 & R \end{array}$$

aqui obtemos os coeficientes do quociente

resto

Exemplo:

Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 – 4x + 1$ por $x – 4$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Para isso, escrevemos o polinômio dividendo ($p(x) = 2x^3 – 4x + 1$) da seguinte forma:

Dispomos os valores que participam do cálculo para montar o dispositivo. ($p(x)=2x^3 - 4x + 1$ e $x - 4$)

Repetimos o coeficiente dominante do dividendo p(x) na linha abaixo.

Multiplicamos o valor de *a* por esse coeficiente e somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de p(x), colocando o resultado abaixo dele.

Valor de a	Coeficientes de p(x)			
4	2	0	-4	1

4	2	0	-4	1
	2			

4	2	0	-4	1
	2	8		

Multiplicamos o valor de *a* pelo resultado que acabamos de obter, somamos o produto com o próximo coeficiente de p(x) e colamos esse novo resultado abaixo desse coeficiente.

4	2	0	-4	1
	2	8	28	

Repetimos o processo até o último coeficiente de p(x), que está separado, à direita.

4	2	0	-4	1
	2	8	28	113

O último resultado é o resto da divisão, e os demais números obtidos são os coeficientes do quociente, dispostos ordenadamente segundo as potências descrentes de x. Com esse procedimento, encontramos o quociente $q(x) = 2x^2 + 8x + 28$ e $r(x) = 113$

Acompanhe no quadro a solução do exemplo abaixo:

Exemplo:

Determinar o resto da divisão de $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$ por $x + 3$.

Equações polinomiais ou algébricas

Equações polinomial u algébrica é toda equação na forma

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

sendo $x \in C$ a incógnita, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ coeficientes complexos (reais ou não), com $a_n \neq 0$, e $n \in IN$.

Exemplos:

$a)\ x^2 + 5x + 6 + i = 0$ $\quad$ $b)\ 2x^5 + 6x - 8i = 0$

Equações algébricas ou polinomiais

Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação algébrica p(x) = 0 de grau n, com $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Observação: Esse teorema foi demonstrado pelo matemático Carl F. Gauss, em 1799, em sua tese de doutorado.

Decomposição em fatores de primeiro grau

Usando o teorema fundamental da Álgebra, é possível demonstrar que:

Todo polinômio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ (com n $\geq$ 1 e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de **n** fatores de 1º grau.

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

Naturalmente:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) = 0$$

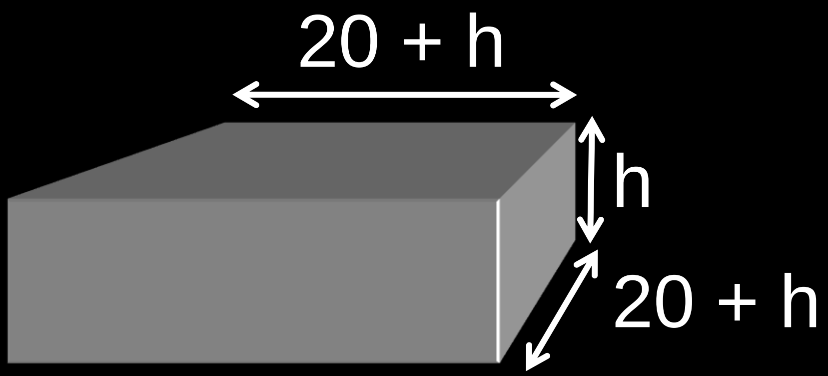
ou seja, toda equação polinomial de grau n tem exatamente **n** raízes complexa (real ou não).

Exemplo:

Uma das raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ é 1. Acompanhe a solução no quadro.

Resoluções de problemas

1) As dimensões de uma caixa dependem de sua altura, conforme a figura abaixo:



a) Dê a expressão algébrica que representa o volume dessa caixa, indicando-o por V(h).
b) Escreva a equação algébrica que permite calcular a altura da caixa quando o volume é de 6.272 u^3.
c) Resolva a equação algébrica no item b.

2) Uma vendedora de uma loja de roupas recebe salário fixo de R$ 500,00 e comissão de 2% sobre o total de vendas no mês. Representando por x o total de vendas em um mês. Qual a expressão que representa o salário da vendedora?

3) Numa sala, a medida do comprimento tem 2 m a mais do que a medida da largura.

a) Expresse a área desse sala em função de uma das dimensões, indicando-a por A(x).
b) Calcule a área da sala para uma largura de 4 m.
c) Calcule as dimensões da sala para uma área de $35m^2$.

4) Um pequeno comerciante guloseimas aproveitou a oferta do PRECINHO e comprou 300 pacotes de amendoim torrado. Sabe-se que na sua compra havia três tamanhos diferentes de pacote (pequeno, médio e grande) e que o número de pacotes pequenos foi o triplo do número de pacotes grandes.

a) Indicando por x o número de pacotes grandes comprado, expresse, em função de x:

- a quantidade de pacotes pequenos;
- a quantidade de pacotes grandes;

b) Sabendo que pacote pequeno – R$ 2,00, médio – R$ 3,00 e grande – R$ 5,00, expresse em função de x, a despesa do comerciante, indicando-a por D(x).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.