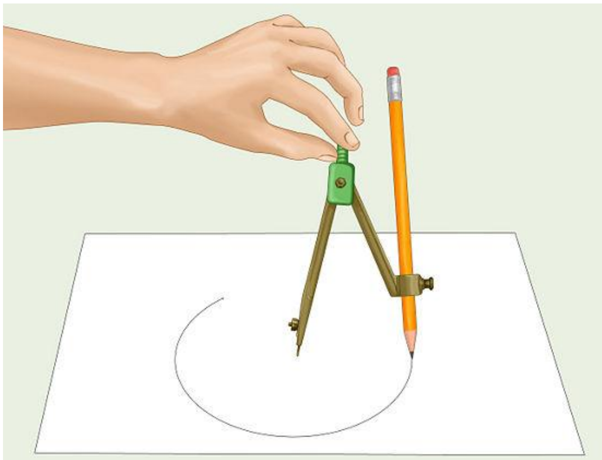
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Campus Marechal Deodoro

Apostila de Matemática III

2° Anos

Professor: Edcarlos Pereira

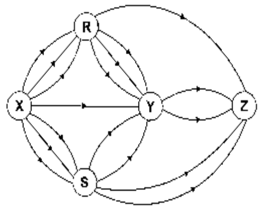


IFAL – 2016

Sumário

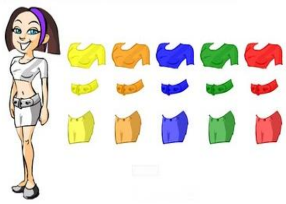
Conteúdo

Análise combinatória e suas aplicações.



Introdução

Análise combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto. Seu estudo encontra aplicação nas mais diversas situações: por exemplo, de quantas maneiras uma garota pode se vestir utilizando 6 blusas, ou quantos jogos teremos, ao se montar tabelas de campeonatos.



Pos	Equipe	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1	Cruzeiro (Macaíba)	11	5	3	2	0	11	5	6
3	Potyguar	8	4	2	2	0	8	1	7
2	Mossoró	7	5	2	1	2	6	4	2
4	Apodi	7	4	2	1	1	5	3	2
5	Upanema	1	4	0	1	3	5	12	-7
6	Parnamirim	1	4	0	1	3	6	16	-10

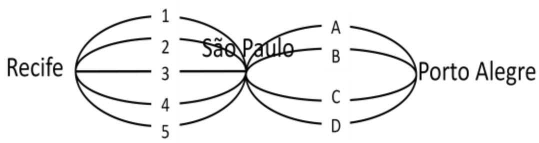
Situação-problema

Um programa de TV sorteia 2 casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendam à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?


Princípio multiplicativo

Acompanhe a resolução do problema abaixo:

Uma pessoa que viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



Total de possibilidades: 5·4 = 20

Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras de ocorrência do acontecimento é $m \cdot n$.

Esse é o *princípio fundamental da contagem (PFC).*

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Veja a seguir alguns exemplos:

1) Num restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ possibilidades.

7	8	8

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ números.

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

7	7	6

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ números de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Neste problema, temos que separar.
Começando por Matemática:

2	2	1	1

Começando por Física:

2	2	1	1

Pelo PFC, temos:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\ \text{e} \qquad\quad + \\ 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \end{array}\right\} = 8$$

Fatorial de um número natural

O fatorial de um número natural n é representado por n! (lemos: “n fatorial”) e definido por:

1) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$

2) $0! = 1$

Exemplos:

1) Calcular o fatorial de: 3, 4, 6 e 10.

- $3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$
- $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$
- $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$
- $10! = \underbrace{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{9!} = 10.9!$

2) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

$$a)\quad \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}} = 8\cdot7 = 56$$

$$b)\quad \frac{48!+49!}{50!} = \frac{48!+49\cdot48!}{50!} = \frac{\cancel{48!}(1+49)}{50\cdot49\cdot\cancel{48!}} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{50}\cdot49} = \frac{1}{49}$$

$$c)\quad \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

Permutação simples

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

Vejamos agora quantos agrupamentos é possível formar quando temos n elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observe os exemplos:

1) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares?

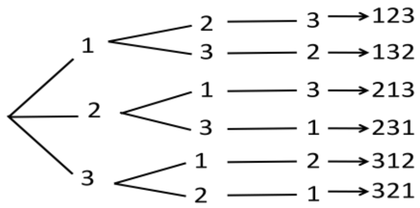
5	4	3	2	1

Há 5 possibilidades para a primeiro lugar, 4 possibilidades para segundo, 3 possibilidades para terceiro, 2 possibilidades para a quarto e 1 possibilidade para a quinto lugar.

Pelo PFC, temos: 5·4·3·2·1=120 maneiras.

2) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismo 1, 2 e 3?

Podemos resolver por tentativa. Assim temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo PFC, temos: 3·2·1= 6 possibilidades.

3) Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

____	____	____	____
4	3	2	1

Considerando as quatro letras: *a*, *n*, *e* e *l*, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo PFC temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades, ou seja, são 24 anagramas.

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de *permutação simples*. Indicamos por P_n o número de permutações simples de **n** elementos:

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$. (Fatorial de n)

Resoluções de problemas

1) Um programa de TV sorteia 2 casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendam à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?


OBMEP 2011

1. Uma aranha encontra-se no ponto A de sua teia e quer chegar ao ponto B sem passar mais de uma vez por um mesmo segmento da teia. Além disso, ao percorrer um segmento radial (em traço mais fino), ela deve seguir o sentido indicado pela flecha. Quantos são os caminhos possíveis?

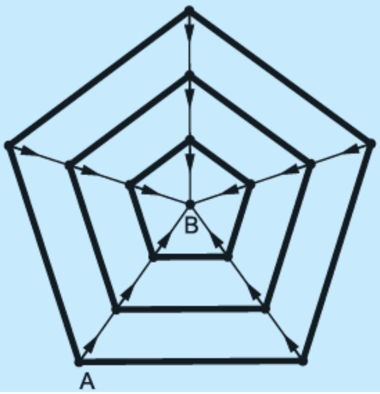
A) $2^3 \times 5$

B) $11^3 \times 5^2$

C) 5^3

D) 11^3

E) 2×5^3



3) (Enem/2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

ENEM 2011

4) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A) 24.
B) 31.
C) 32.
D) 88.
E) 89.

5) Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas?

6) Um estádio possui 4 portões. De quantas maneiras diferentes um torcedor pode entrar e sair desse estádio utilizando, para sair, um portão diferente do que entrou?

Permutação com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$

Observe os exemplos:

1) Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Note que, o T repete 2 vezes, o A 3 vezes e temos o total de 6 letras. Logo,

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{2!\cancel{3!}} = \frac{6\cdot5\cdot4}{2} = 6\cdot5\cdot2 = 60$$

2) Quantos são os anagramas da palavra DEZESSETE?

Neste exemplo, o S repete 2 vezes, o E repete 4 vezes e temos o total de 9 letras. Logo,

$$P_9^{2,4} = \frac{9!}{2!4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{2!\cancel{4!}} = 7560$$

3) Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida um sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

Veja abaixa uma possível resposta:

1 1 2 6 1 1 5. Note que, o 1 repete 4 vezes e o total são 7 números.

$$P_7^{4} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

Arranjos simples

Vimos que permutação simples de n elementos é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos. Agora tendo n elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de p elementos, $p \leq n$.

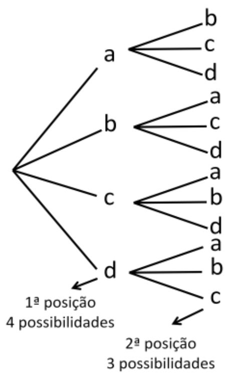
Observe os exemplos:

1) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

São 3 estados: Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Para pintar o Rio Grande do Sul há 5 possibilidades, para Paraná há 4 possibilidades e para Santa Catarina há 3 possibilidades.

Pelo PFC, temos: 5·4·3 = 60 possibilidades.

2) Considerando as letras *a*, *b*, *c* e *d*. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?



Na primeira posição temos 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis). Na segunda posição, 3 possibilidades (pois temos 3 elementos disponíveis).

Pelo PFC, temos: 4·3 = 12 possibilidades

Os 12 agrupamentos são:

ab	ba	ca	da	ac	bc
cb	bd	ad	db	cd	dc

Esses agrupamentos são chamados de arranjos simples. Arranjamos 4 elementos tomados 2 a 2, e o número desses arranjos foi 12. Escrevemos então:

$A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$ (arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2 é igual a 12).

3) Usando os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar?

___	___	___
5	4	3

Há 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 4 para o segundo e 3 para o terceiro. No total podemos então formar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números

Dizemos neste exemplo que fizemos arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3, e o número desses arranjos é 60. Indicamos assim: $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Definição e fórmula dos arranjos simples

Arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com *p* dos *n* elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A^p_n o total desses agrupamentos, que calculamos por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

Quantas maneiras 5 meninos podem se sentar num banco que tem apenas 3 lugares?

Queremos arranjar 5 elementos tomados 3 a 3. Então,

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \ \ maneiras.$$

Resoluções de problemas

1) Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo?

2) Em uma escola está sendo realizado um torneio de futebol de salão, no qual dez times estão participando. Quantos jogos podem ser realizados entre os times participantes em turno e returno?

OBMEP 2011

3) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

A) 12654
B) 12740
C) 13124
D) 13210
E) 13320

4) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3.

De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

a) 551 b) 552 c) 553 d) 554 e) 555

Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção o exemplo abaixo:

1) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representamos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo.

Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos {A,E,R,F,G}.

A ordem em que os elementos aparecem nos subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane.

Então, os subconjuntos de 2 elementos são:

{A,E},{A,R},{A,F},{A,G},{E,R}{E,F},{E,G},{R,F}, {R,G}{F,G}.

Chamamos estes subconjuntos de combinação simples de 5 elementos tomados com 2 a 2. Escrevemos $C_{5,2}$.

Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2}$ =10.

Definição e fórmula das combinações simples

Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinações simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis.

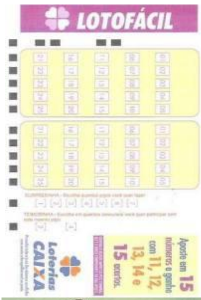
Indica-se por $C_{n,p}$ ou C^p_n o total desses subconjuntos, que calculamos por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Exemplo:

2) Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que 3 pontos não sejam colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

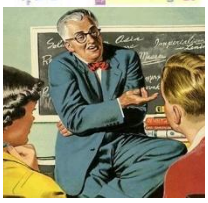
A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.



$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{3!\,\cancel{3!}} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{6}} = 20$$

Resoluções de problemas

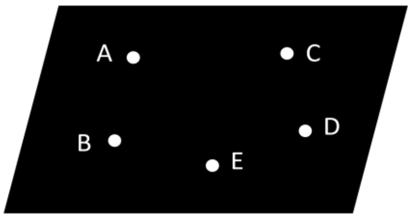
1) Para fazer uma aposta da Lotofácil, devemos marcar 15 números entre os 25 constantes no volante. De Quantas maneiras é possível preencher um cartão da Lotofácil?



2) Para resolver um assunto entre 6 professores e 4 alunos, devemos formar comissões com 3 professores e 2 alunos. Quantas são as possibilidades?

3) Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 6. De quantas maneiras ele poderá escolher essas 6 questões?

4) Num plano existem 5 pontos, sendo que 3 deles não são colineares. Qual é o número possível de retas que passam por esses pontos?



Probabilidade e Suas Aplicações

Introdução

Na Mega-Sena, um apostador pode marcar no mínimo 6 números entre 60, conseqüentemente, ele poderá se tornar um milionário ao ser sorteados os seus números.

A área da Matemática que investiga a chance de ocorrência de um evento é denominada teoria das probabilidades e teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar.

Atualmente encontramos aplicação da teoria das probabilidades em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica, por exemplo, na previsão meteorológica, na análise especulativa da economia mundial ou no possíveis efeitos colaterais dos medicamentos.

Situação-problema

De um grupo de 24 alunos, 14 frequentam o curso de Música clássica, 9 frequentam o curso de Artes plásticas e 6 frequentam ambos os cursos. Selecionando, ao acaso, um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de ele:

a) Frequentar o curso de Música clássica?
b) Frequentar o curso de Artes plásticas?
c) Não frequentar nenhum desses cursos?
d) Não frequentar o curso de Artes plásticas?

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

1) Experimento aleatório: é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.

Exemplos:

a) lançamento de um dado;

b) lançamento de uma moeda;

c) sorteio de uma carta de um baralho honesto de 52 cartas;

d) nascimento de 3 filhos, etc.

2) Espaço Amostral (S): é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

a) No lançamento de um dado, o espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5 e 6}.

b) No lançamento de duas moedas, o espaço amostral S = {(c,c);(c,k);(k,c);(k,k)}.

3) Evento (E): é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Exemplos:

a) No lançamento de um dado, um possível evento é: o número apresentado na face voltada para cima é par. Nesse caso o evento E = {2, 4, 6}.

b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: a bola retirada conter um número primo menor que 20. O evento E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.

Evento simples, evento certo e evento impossível

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado evento simples.

Se coincidir com o espaço amostral, o evento será chamado evento certo. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo.

Se for o conjunto vazio, o evento será chamado evento impossível. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, "obter um número maior que 6" é um evento impossível.

Definição

Em um espaço equiprovável (mesmas chances de ocorrer), a probabilidade de ocorrência de um evento, indicada por P(E), é a razão entre o número de elementos do evento, n(E), e o número de elementos do espaço amostral, n(S):

$$\boxed{P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}}$$

Consequências da definição

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório, temos:

$$0 \le n(E) \le n(S) \Rightarrow \quad \frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow \quad 0 \le P(E) \le 1.$$

Exemplos:

1) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a) O número 3?

b) Um número menor que 7?

c) Um número menor que 1?

d) Um divisor do total de pontos?

Solução:

a) E={3}, n(E)=1, S={1,2,3,4,5,6} e n(S)=6

P(E)=n(E)/n(S)=1/6 $\cong$ 0,166=16,6%

b) E={1,2,3,4,5,6} e n(E)=6

P(E)=6/6=1=100%

c) E=$\varnothing$ e n(E)=0

P(E)=0/6=0%

d) S={1,2,3,4,5,6}, Total de pontos=21, Divisores de 21 => {1,3,7,21}, E={1,3}, n(E)=2. P(E)=2/6=1/3

2) No lançamento de uma moeda e de um dado, determinar:

a) O espaço amostral S;

b) O número de elementos do evento E_1: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de E_1;

c) A probabilidade de ocorrência do evento E_2: face 3 no dado.

Solução:

a) S={(1,c),(1,k),(2,c),(2,k),(3,c),(3,k),(4,c),(4,k),

(5,c),(5,k),(6,c),(6,k)}

b) E_1={(2,K),(4,k),(6,k)}, n(E_1)=3.

P(E_1)=3/12=1/4=0,25=25%

c) E_2={(3,c),(3,k)}, n(E_2)=2.

P(E_2)=2/12=1/6 $\cong$ 0,166=16,6%

3) Dois irmãos são colocados aleatoriamente em uma fila. Se há 6 pessoas na fila, qual é a probabilidade de os irmãos ficarem juntos?

O número de elementos do espaço amostral S é: n(S) = P_6 = 6! = 720.

O número de elementos do evento E é: n(E) = 2!5! = 2·120 = 240.

Logo, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{240}{720} = \dfrac{24}{72} = \dfrac{1}{3}\ OU\ 0{,}33...\ OU\ 33{,}33\%$

4) De um baralho comum, com 52 cartas, extraímos, ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de sair um ás?

Lembre-se que temos: {ás de copas, às de paus, ás de ouros, ás de espadas}. Logo,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Resoluções de Problemas

1) (METODISTA) Em um único sorteio envolvendo os números naturais de 1 a 200, a probabilidade de neste sorteio sair um número que seja múltiplo de sete é:

a) 14% b) 15% c) 18% d) 19% e) 20%

2) (ACAFE) Uma urna contém 6 bolas brancas e 24 pretas. A probabilidade de sortearmos uma bola branca é de:

a) 40% b) 25% c) 80% d) 75% e) 20%

3) (ENEM 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	**260**
crianças	150	210	90	**450**

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

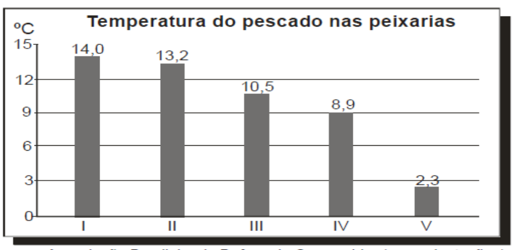
b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

4) (ENEM 2007) Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 ºC e 4 ºC. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

$a)\frac{1}{2}$ $\quad b)\frac{1}{3}$ $\quad c)\frac{1}{4}$ $\quad d)\frac{1}{5}$ $\quad e)\frac{1}{6}$

5) (OBMEP 2010) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

$a)\frac{3}{5}$ $\quad b)\frac{5}{9}$ $\quad c)\frac{1}{2}$ $\quad d)\frac{2}{3}$ $\quad e)\frac{3}{4}$

6) (OBMEP 2011) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

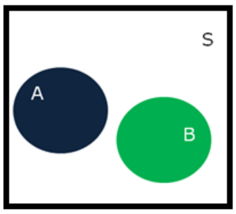
$a)\frac{1}{9}$ $\quad b)\frac{1}{8}$ $\quad c)\frac{2}{9}$ $\quad d)\frac{3}{8}$ $\quad e)\frac{3}{4}$

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral S finito, não vazio e equiprovável. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

1° Caso - $A \cap B = \varnothing$ Temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



$Como\ \ n(S) \neq 0,\ \ podemos\ \ escrever:$

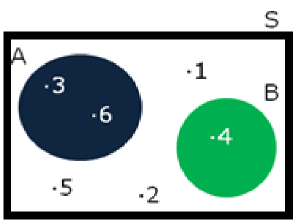
$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B}{n(S)} \qquad Logo: \ \ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo:

Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Evento A: ocorre múltiplo de 3 $\Rightarrow$ A = {3,6}

Evento B: ocorre múltiplo de 4 $\Rightarrow$ B = {4}



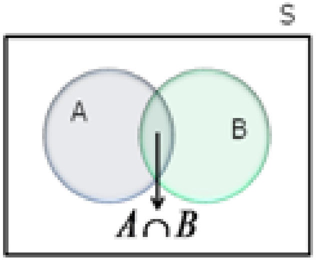
Como $A \cap B = \varnothing$, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2° Caso - $A \cap B \neq \varnothing$

Da teoria dos conjuntos, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



Dividindo membro a membro por n(S) ≠ 0 vem:

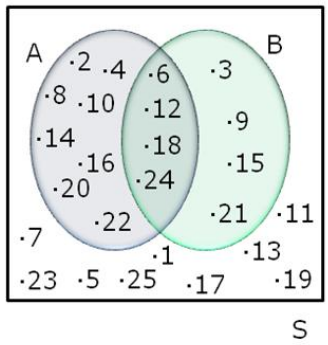
$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Daí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Exemplo:

Em uma urna com 25 bolas numeradas de 1 a 25 é extraída uma bola ao acaso. Qual a probabilidade do número sorteado ser múltiplo de 2 ou de 3?



Evento A: ocorre múltiplo de 2;

$\Rightarrow$ A = {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24}

Evento B: ocorre múltiplo de 3;

$\Rightarrow$ B = {3,6,9,12,15,18,21,24}

Note que $A \cap B$ = {6,12,18,24}

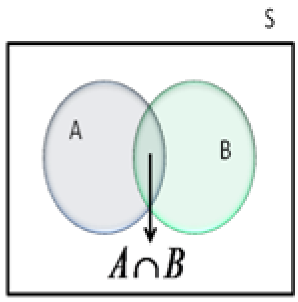
Daí, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12+8-4}{25} = \frac{16}{25}$$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, é indicada por P(A/B) e é dada por:



$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Também podemos fazer:

$$P(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \quad \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo:

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino de Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

Já voou antes? Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontra-se organizados na tabela seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele está voando pela primeira vez. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Seja A o evento: já conhecia Natal e

B o evento: viajado pela primeira vez.

Então, n(A) = 35, n(B) = 106 e n(A∩B) = 23, como:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Daí,

$$P(A/B) = \frac{23}{106}$$

Eventos independentes

Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:

a) obtermos cara no segundo lançamento;

b) obtermos cara no segundo lançamento sabendo que obtivemos cara no primeiro.

Solução:

a) Seja c = cara, k = coroa e S o espaço amostral. Temos:

S = {(c,c), (c,k), (k,k), (k,c)}, n(S) = 4

O evento que queremos é: A = {(c,c), (k,c)}, n(A) = 2

Logo, P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 = 1/2

b) Temos dois eventos a considerar:

- cara no primeiro lançamento, B = {(c,c), (c,k)}, e
- cara no segundo lançamento, A = {(c,c), (k,c)}

Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na interseção de A e B:

P(A/B) = n(A∩B)/n(B) = 1/2

Observando as resposta dos itens a e b, temos: P(A/B) = P(A) = 1/2.

Definição:

Seja um espaço amostral S, finito e não vazio e sejam A e B eventos de S, dizemos que A e B são eventos independentes se, e somente se:

P(A/B) = P(A) ou P(B/A) = P(B)

Probabilidade da interseção de dois eventos

Seja S um espaço amostral finito e não vazio. A e B são eventos de S. Quando estudamos probabilidade condicional, vimos que,

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ segue, imediatamente, a relação:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)}$$

Essa identidade é conhecida como teorema da multiplicação de probabilidades.

Se A e B forem eventos independentes, então:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Exemplo:

A probabilidade de um atirador X acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade do atirador Y acertar o mesmo alvo é 90%.

Se os dois atirarem uma vez, qual é a probabilidade de que:

a) ambos atinjam o alvo?

b) pelo menos um atinja o alvo?

Solução:

a) Note que: $P(X\cap Y) = P(X)\cdot P(Y)$

$= 0{,}80\cdot 0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$

b) Podem ocorrer três casos:

(X acerta e Y erra) ou (X erra e Y acerta) ou (X acerta e Y acerta)

$0{,}80\cdot 0{,}10 \quad + \quad 0{,}20\cdot 0{,}90 \quad + \quad 0{,}80\cdot 0{,}90$

$0{,}08 \quad + \quad 0{,}18 \quad + \quad 0{,}72 = 0{,}98$

Assim, a probabilidade é 98%.

Resoluções de Problemas

1) De um grupo de 24 alunos, 14 frequentam o curso de Música clássica, 9 frequentam o curso de Artes plásticas e 6 frequentam ambos os cursos. Selecionando, ao acaso, um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de ele:

a) Frequentar o curso de Música clássica?
b) Frequentar o curso de Artes plásticas?
c) Não frequentar nenhum desses cursos?
d) Não frequentar o curso de Artes plásticas?

2) Uma cidade tem 50000 habitantes possui 3 jornais, A, B e C. Sabe-se que:

e) 15 000 lêem o jornal A;
f) 10000 lêem o jornal B;
g) 8000 lêem o jornal C;
h) 6000 lêem os jornais A e B
i) 4000 lêem os jornais A e C
j) 3000 lêem os jornais B e C
k) 1000 lêem os três jornais.
l) Uma pessoa é selecionada ao acaso.
m) Qual a probabilidade de que:
n) a) de ler o jornal A ou B
o) b) ela leia pelo menos um jornal
p) c) leia só um jornal

3) (OBMEP 2008) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

$a)\frac{7}{8}$ $b)\frac{5}{6}$ $c)\frac{2}{3}$

$d)\frac{5}{8}$ $e)\frac{3}{4}$

4) (OBMEP 2009) Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?

$a)\frac{1}{2}$ $b)\frac{2}{3}$ $c)\frac{3}{5}$

$d)\frac{3}{4}$ $e)\frac{4}{7}$

Referências

Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.