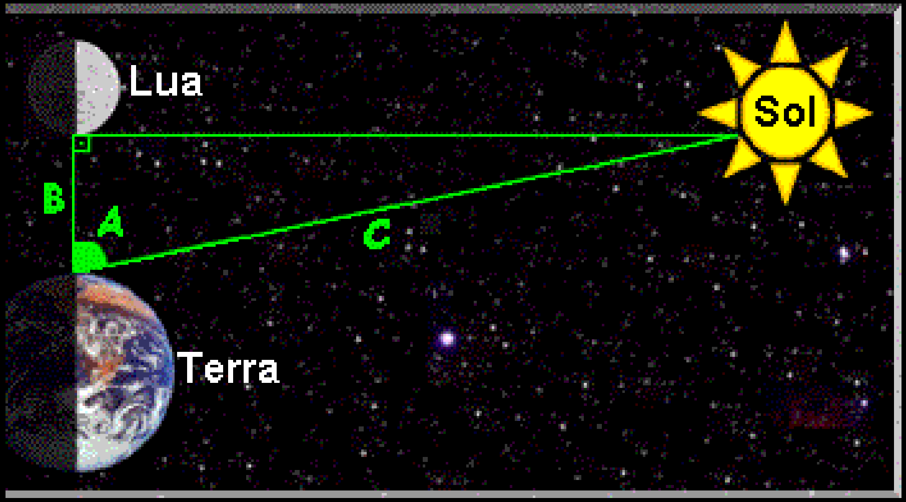


Prof. Edcarlos Pereira

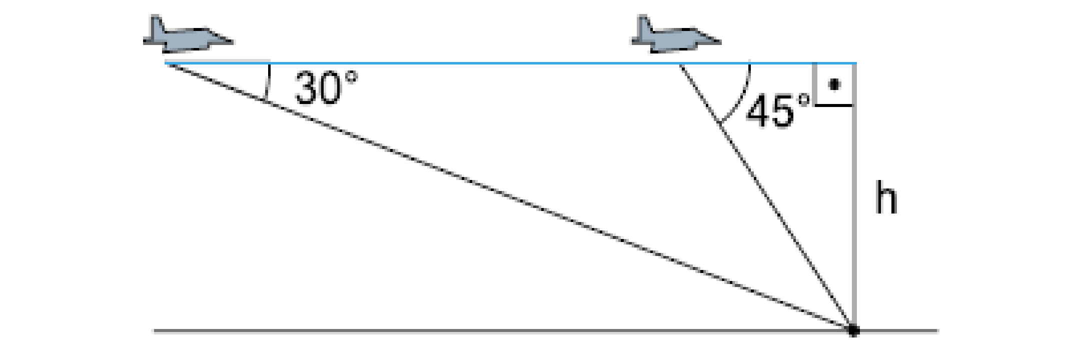
TRIGONOMETRIA E SUAS APLICAÇÕES. PARTE 1

Introdução

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da Matemática e já está conosco desde a antiguidade para medir ângulos e distâncias com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre, a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas, tanto na matemática como na física.

Situação-problema

(UEPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45°.



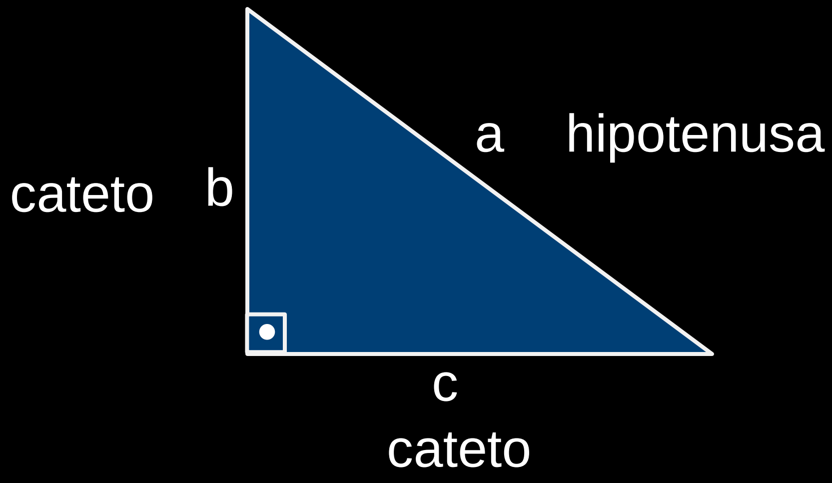
Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400m/s?

$a)\ 500(\sqrt{3}+1)m$ $b)\ 600(\sqrt{3}-1)m$

$c)\ 750\sqrt{3}m$ $d)\ 1.500m$ $e)\ 2.000m$

Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é todo triângulo que apresenta um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°.



A hipotenusa é sempre o maior lado do triângulo retângulo, se opõe ao ângulo de 90º.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos ($a^2 = b^2 + c^2$).

Trigonometria no triângulo retângulo

1) Qual é a razão entre a altura e percurso ao subir uma escada?

$$\frac{altura}{percurso} = número \ k_1 = \frac{b}{a}$$

Seno de um ângulo α de subida = k_1

$$sen\,\alpha = k_1 = \frac{b}{a}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo o seno de um ângulo α será dado por:

$$sen\,\alpha = \frac{medida \ do \ cateto \ oposto \ ao \ ângulo \ \alpha}{medida \ da \ hipotenusa}$$

2) Qual é a razão entre o afastamento e percurso ao subir uma escada?

$$\frac{afastamento}{percurso} = número\ k_2 = \frac{c}{a}$$

Cosseno de um ângulo α de subida = k_2

$$\cos\alpha = k_2 = \frac{c}{a}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo o cosseno de um ângulo α será dado por:

$$\cos\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ ângulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

3) Qual é a razão entre a altura e o afastamento ao subir uma escada?

$$\frac{altura}{afastamento} = número \ k_3 = \frac{b}{c}$$

Tangente de um ângulo α de subida = k_3

$$tg\alpha = k_3 = \frac{b}{c}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo a tangente de um ângulo α será dado por:

$$tg\alpha = \frac{medida \ do \ cateto \ oposto \ ao \ ângulo \ \alpha}{medida \ do \ cateto \ adjacente \ ao \ ângulo \ \alpha}$$

Exemplos:

01) Mostre que $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$.

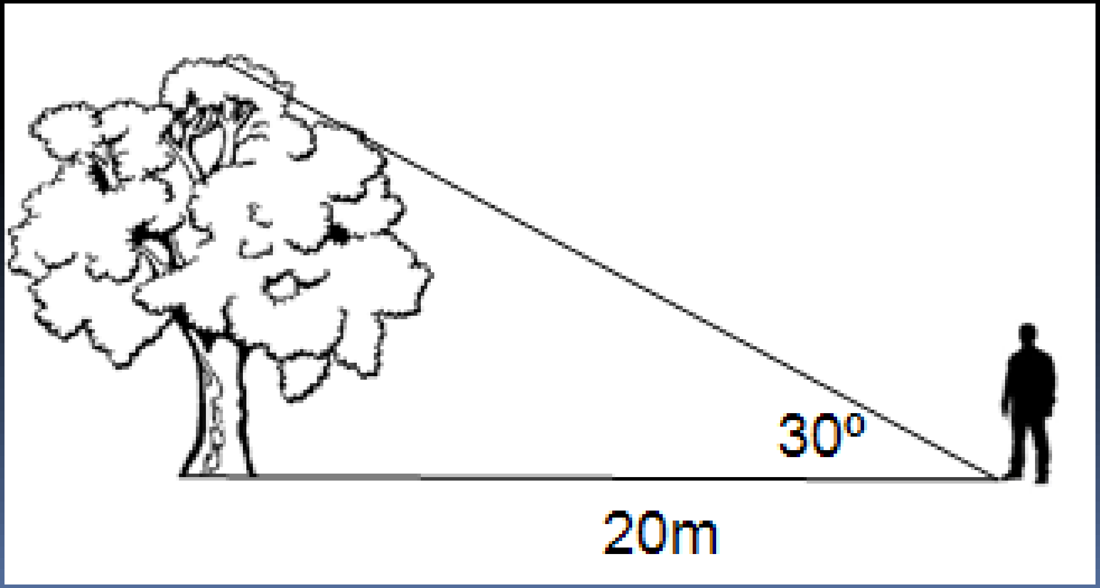
02) Verificar que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ângulos notáveis

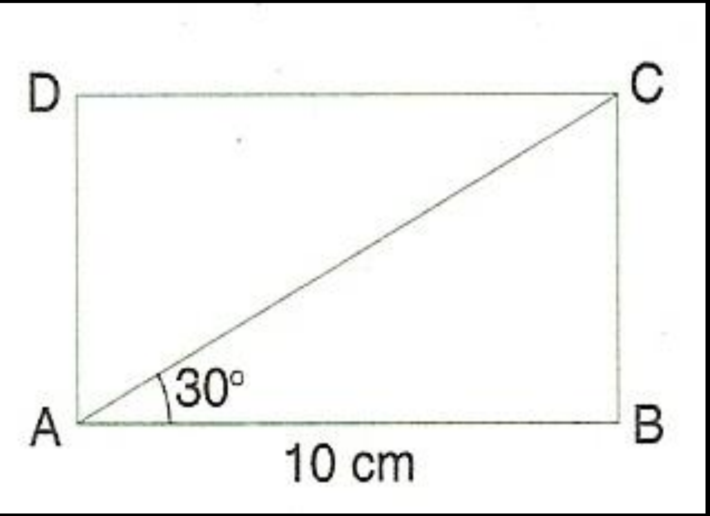
	30º	45º	60º
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

03) O ângulo de elevação do topo de uma árvore tomado a partir do pé de uma pessoa é de 30º. Sabendo-se que a árvore está distante 20m do pé da pessoa, que medida tem a árvore aproximadamente?

a) 5,5m b) 11,5m c) 15m
d) 20m e) 40m



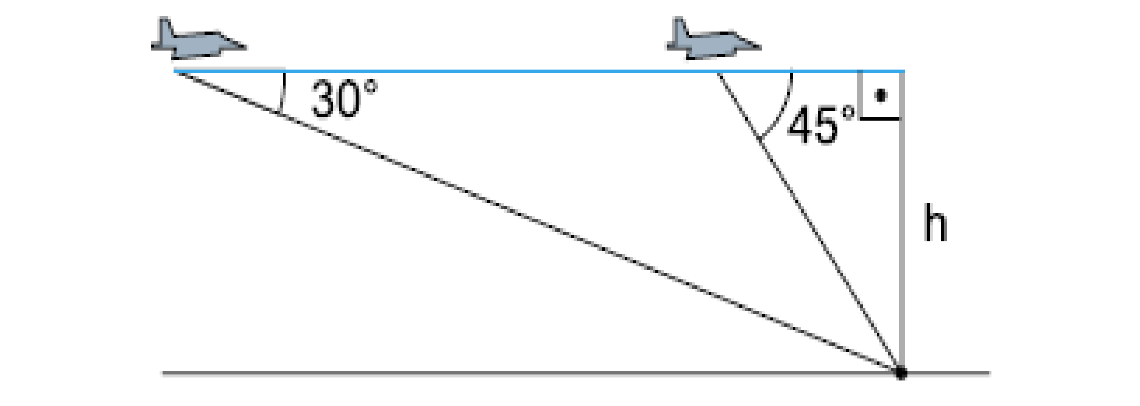
04) Seja o retângulo ABCD ao lado. Determine sua área e o perímetro do triângulo ABC.



05) Um barqueiro cobra R$ 0,25 por metro navegado. De um lado da margem da lagoa, avista-se o topo de um poste na outra margem sob um ângulo de 45º, em relação ao plano horizontal. Sabendo que o poste tem altura de 20 metros. Quanto o barqueiro recebe em cada transporte que faz?

a) R$ 2,00 b) R$ 3,00 c) R$ 4,00 d) R$ 5,00 e) R$ 10,00

06) (UEPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45°.



Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400m/s?

$a)\ 500(\sqrt{3}+1)m$

$b)\ 600(\sqrt{3}-1)m$

$c)\ 750\sqrt{3}m$

$d)\ 1.500m$

$e)\ 2.000m$

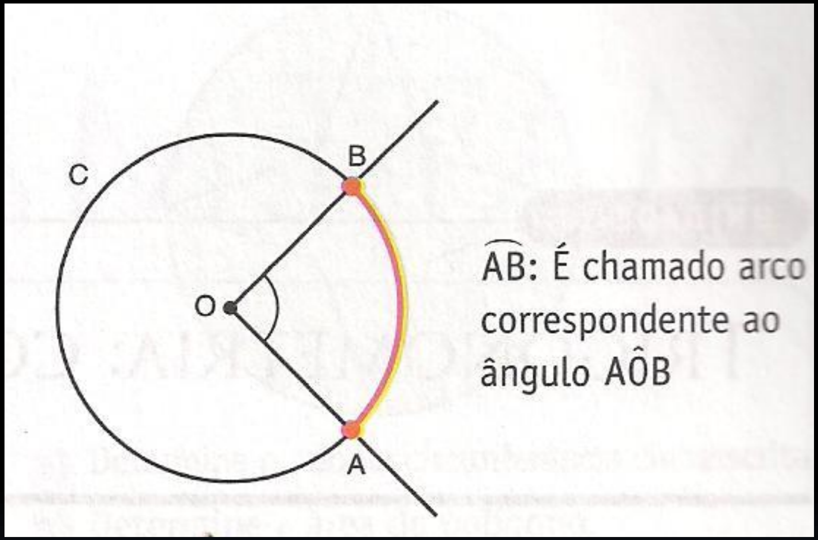
Trigonometria no círculo

Arcos e ângulos

Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.

Ângulo central

Todo ângulo central possui um arco correspondente, e reciprocamente, a todo arco corresponde um ângulo central.

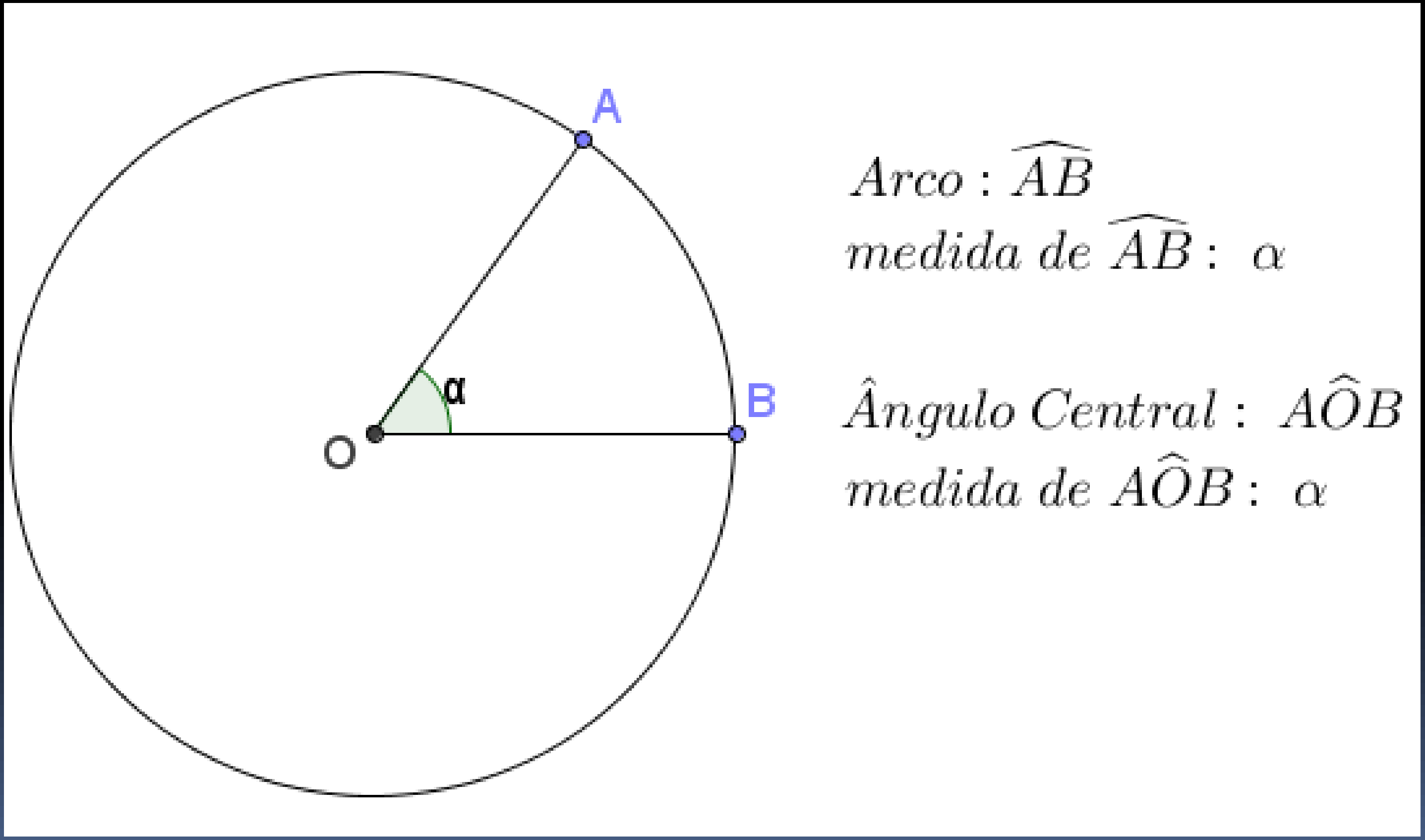


Medida e comprimento do arco

Existem duas formas de medirmos um arco de circunferência. Angular e Linear.

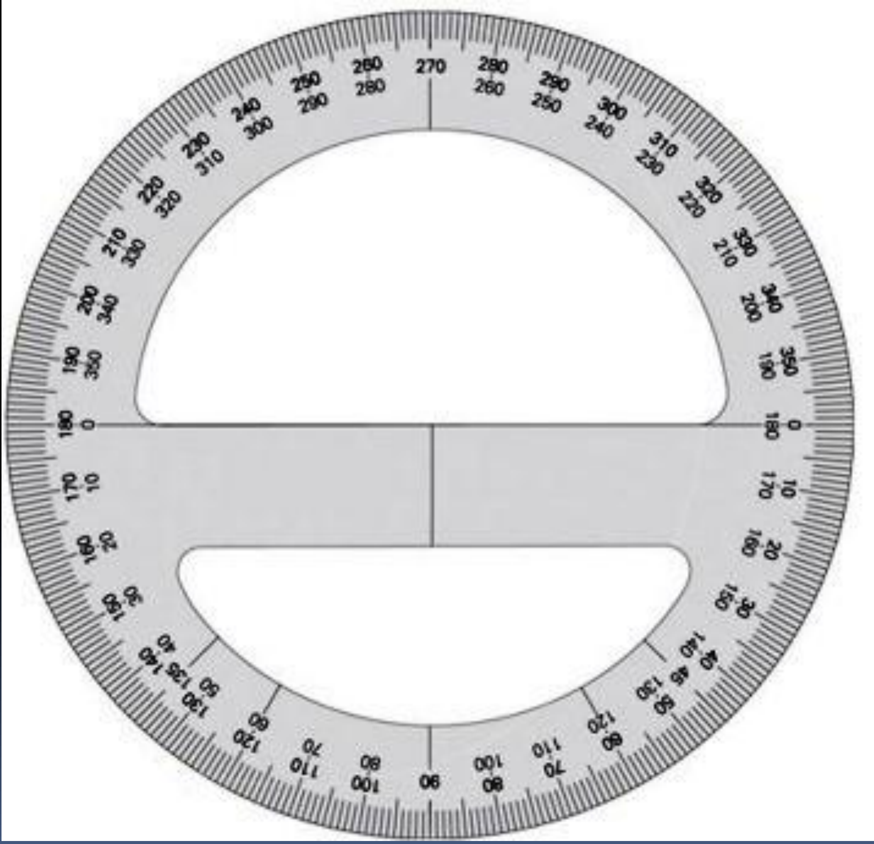
Medida angular

A medida do ângulo central α é igual a medida angular do arco AB. Para medida angular (medida) de um arco, usamos o **grau** ou o **radiano**.



Medida de arcos: o grau

O grau é definido, dividindo-se uma circunferência em 360 partes iguais. Cada uma dessas partes, corresponde a um arco de um grau (1°).



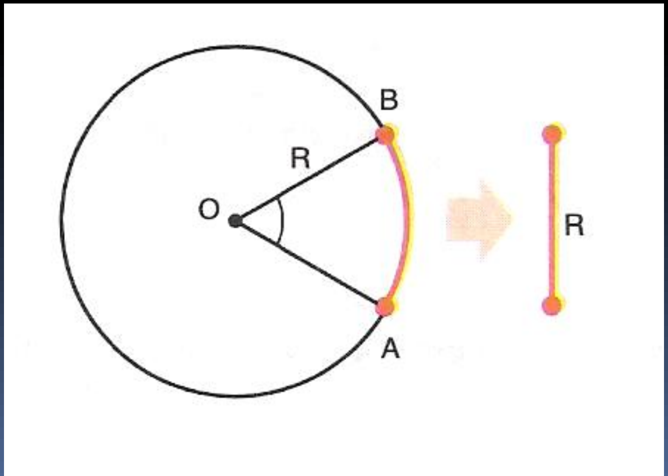
Transferidor usado para medir ângulos.

Medida de arcos: o radiano

Observe o arco AB da circunferência, em que o comprimento é igual a medida do raio:

Dizemos que, a medida do arco AB ou do ângulo central AÔB, é igual a 1 radiano (1 rad).

Assim, dizemos que **um arco** AB **que possui comprimento igual ao raio da circunferência, mede 1 radiano.**



Relação entre grau e radiano

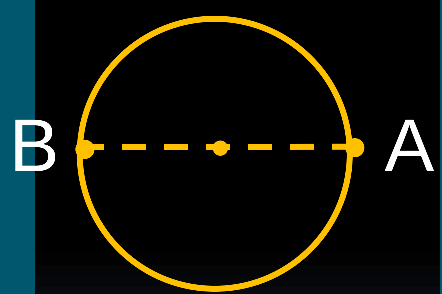
Sabemos que o comprimento C da circunferência de raio r é igual a $C = 2\pi r$, em que $\pi = 3,141592...$

Como cada raio r corresponde 1 rad, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi r = 2\pi \cdot 1 \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$

Arco de 360º

ou arco

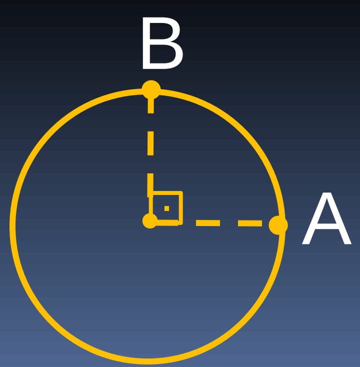
de 2π rad



Arco de 180º

ou arco

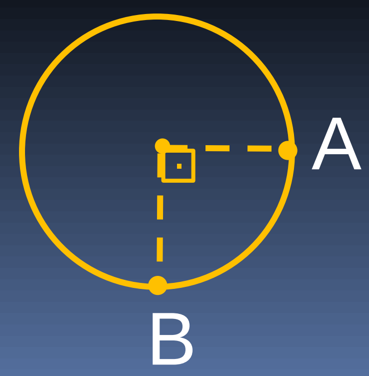
de π rad



Arco de 90º

ou arco

de $\pi/2$ rad



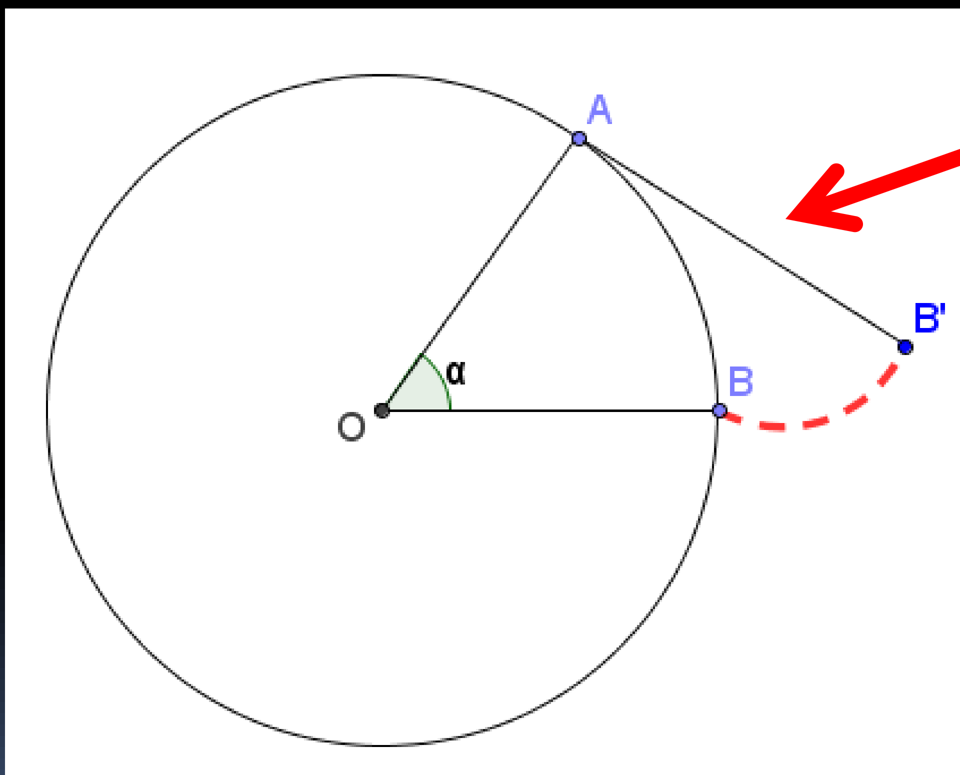
Arco de 270º

ou arco

de $3\pi/2$ rad

Medida linear (comprimento)

A medida linear de um arco é a medida angular de seu comprimento.



Se pudéssemos "esticar" esse arco, seria possível medir seu comprimento.

Para medida linear (comprimento) de um arco, usaremos: metros, centímetros, milímetros, etc.

Relação entre o comprimento ℓ e a medida do ângulo α (em graus) do arco:

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C=2\pi r$.

Medida de uma circunferência em graus: 360°

Comprimento (linear)	Medida (angular)
$2\pi r$	360º
ℓ	α

$$Segue\ que:\ l=\alpha\cdot r$$

Exemplos:

1) Converter 30° em radianos.

Graus	Radianos
180	π
30	x

$$\rightarrow 180x = 30\pi$$

$$x = \frac{30\pi}{180}$$

$$x = \frac{\pi}{6} rad$$

2) Converter 3π/4 em graus.

Graus	Radianos
180	π
x	3π/4

$$\rightarrow \pi x = 180\frac{3\pi}{4}$$

$$x = 180\frac{3\pi}{4\pi}$$

$$x = 45 \cdot 3$$

$$x = 135°$$

3) Calcule, em radianos, a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15cm contido numa circunferência de raio 3cm.

4) O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 12cm. Quantos centímetros sua extremidade percorre durante 25 minutos?

5) Um pêndulo tem 15cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60°. Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

- Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.