PROBABILIDADE E SUAS APLICAÇÕES

PROF. EDCARLOS PEREIRA



INTRODUÇÃO

Na Mega-Sena, um apostador pode marcar no mínimo 6 números entre 60, conseqüentemente, ele poderá se tornar um milionário ao ser sorteados os seus números.

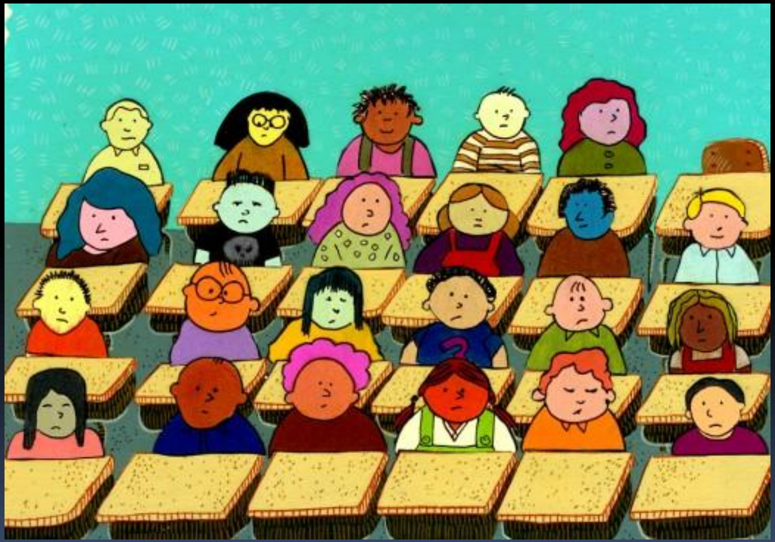
A área da Matemática que investiga a chance de ocorrência de um evento é denominada teoria das probabilidades e teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar.

Atualmente encontramos aplicação da teoria das probabilidades em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica, por exemplo, na previsão meteorológica, na análise especulativa da economia mundial ou no possíveis efeitos colaterais dos medicamentos.

Situação-problema

De um grupo de 24 alunos, 14 frequentam o curso de Música clássica, 9 frequentam o curso de Artes plásticas e 6 frequentam ambos os cursos. Selecionando, ao acaso, um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de ele:

a) Frequentar o curso de Música clássica?
b) Frequentar o curso de Artes plásticas?
c) Não frequentar nenhum desses cursos?



d) Não frequentar o curso de Artes plásticas?

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

1) Experimento aleatório: é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.

Exemplos:

a) lançamento de um dado;

b) lançamento de uma moeda;

c) sorteio de uma carta de um baralho honesto de 52 cartas;

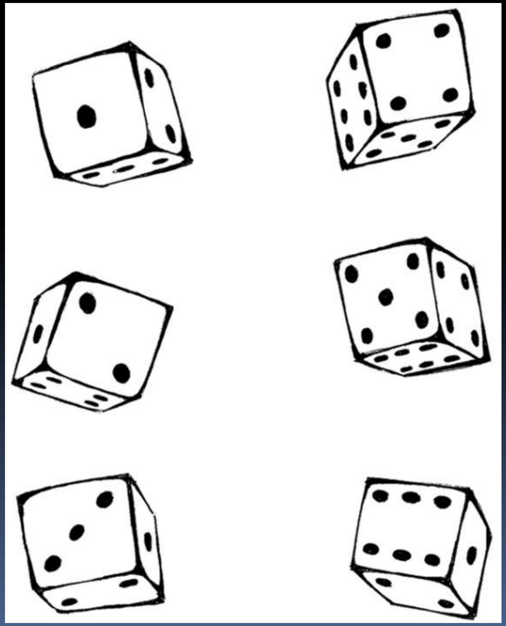
d) nascimento de 3 filhos, etc.

2) Espaço Amostral (S): é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

a) No lançamento de um dado, o espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5 e 6}.

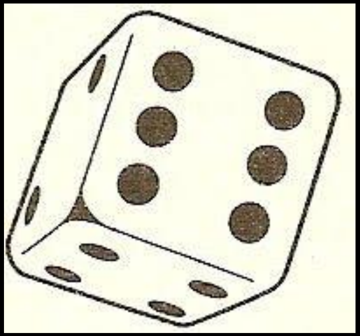
b) No lançamento de duas moedas, o espaço amostral S = {(c,c);(c,k);(k,c);(k,k)}.



3) Evento (E): é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Exemplos:

a) No lançamento de um dado, um possível evento é: o número apresentado na face voltada para cima é par. Nesse caso o evento E = {2, 4, 6}.



b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: a bola retirada conter um número primo menor que 20. O evento E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.

Evento simples, evento certo e evento impossível

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado evento simples.

Se coincidir com o espaço amostral, o evento será chamado evento certo. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, “obter um número natural menor que 7” é um evento certo.

Se for o conjunto vazio, o evento será chamado evento impossível. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, “obter um número maior que 6” é um evento impossível.

Definição

Em um espaço equiprovável (mesmas chances de ocorrer), a probabilidade de ocorrência de um evento, indicada por P(E), é a razão entre o número de elementos do evento, n(E), e o número de elementos do espaço amostral, n(S):

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

Consequências da definição

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório, temos:

$$0 \leq n(E) \leq n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1.$$

Exemplos:

1) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a) O número 3?

b) Um número menor que 7?

c) Um número menor que 1?

d) Um divisor do total de pontos?

Solução:

a) $E=\{3\}$, $n(E)=1$, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ e $n(S)=6$

$P(E)=n(E)/n(S)=1/6 \cong 0{,}166=16{,}6\%$

b) $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ e $n(E)=6$

$P(E)=6/6=1=100\%$

c) $E=\emptyset$ e $n(E)=0$

$P(E)=0/6=0\%$

d) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, Total de pontos=21, Divisores de 21 => $\{1,3,7,21\}$, $E=\{1,3\}$, $n(E)=2$. $P(E)=2/6=1/3$

2) No lançamento de uma moeda e de um dado, determinar:

a) O espaço amostral S;

b) O número de elementos do evento E_1: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de E_1;

c) A probabilidade de ocorrência do evento E_2: face 3 no dado.

Solução:

a) S={(1,c),(1,k),(2,c),(2,k),(3,c),(3,k),(4,c),(4,k),(5,c),(5,k),(6,c),(6,k)}

b) E_1={(2,K),(4,k),(6,k)}, $n(E_1)=3$.

$P(E_1)=3/12=1/4=0{,}25=25\%$

c) E_2={(3,c),(3,k)}, $n(E_2)=2$.

$P(E_2)=2/12=1/6 \cong 0{,}166=16{,}6\%$

3) Dois irmãos são colocados aleatoriamente em uma fila. Se há 6 pessoas na fila, qual é a probabilidade de os irmãos ficarem juntos?

O número de elementos do espaço amostral S é: $n(S) = P_6 = 6! = 720$.

O número de elementos do evento E é: $n(E) = 2!5! = 2x120 = 240$.

Logo, $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{240}{720} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3} \quad OU \quad 0{,}33\ldots \quad OU \quad 33{,}33\%$$

4) De um baralho comum, com 52 cartas, extraímos, ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de sair um ás?

Lembre-se que temos: {ás de copas, às de paus, ás de ouros, ás de espadas}. Logo, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

1) (METODISTA) Em um único sorteio envolvendo os números naturais de 1 a 200, a probabilidade de neste sorteio sair um número que seja múltiplo de sete é:

a) 14% b) 15% c) 18%
d) 19% e) 20%

2) (ACAFE) Uma urna contém 6 bolas brancas e 24 pretas. A probabilidade de sortearmos uma bola branca é de:

a) 40% b) 25% c) 80%
d) 75% e) 20%

3) (ENEM 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	**260**
crianças	150	210	90	**450**

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

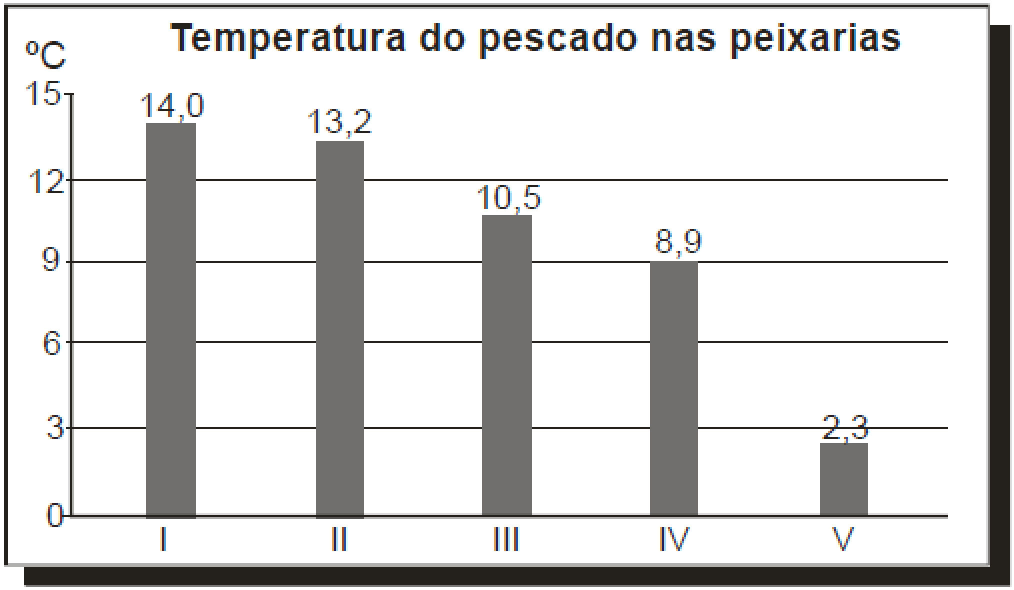
a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

4) (ENEM 2007) Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 ºC e 4 ºC. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

$a)\frac{1}{2}$ $b)\frac{1}{3}$ $c)\frac{1}{4}$ $d)\frac{1}{5}$ $e)\frac{1}{6}$

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral S finito, não vazio e equiprovável. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

1 Caso - $A \cap B = \varnothing$

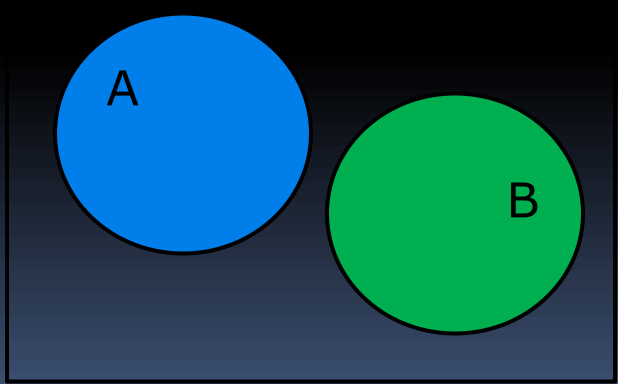
S

Temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$$Como\ \ n(S) \neq 0,\ \ podemos\ \ escrever:$$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B}{n(S)}$$

$$Logo:\ \ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



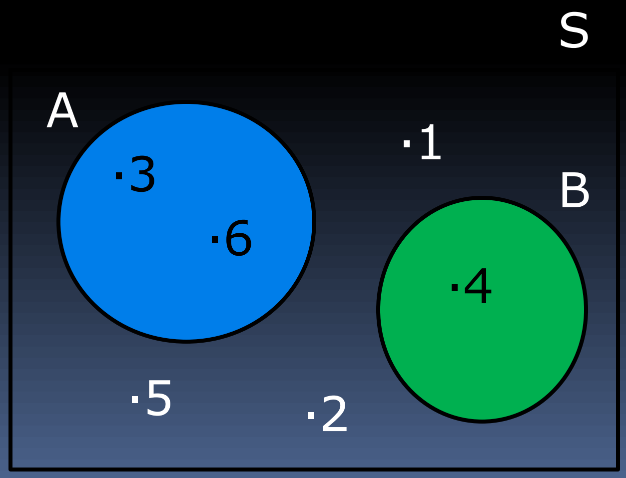
Nesse caso, A e B são chamados eventos mutuamente exclusivos.

Exemplo:

Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Evento A: ocorre múltiplo de 3 $\Rightarrow$ A = {3,6}
Evento B: ocorre múltiplo de 4 $\Rightarrow$ B = {4}
Como A $\cap$ B = $\varnothing$, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

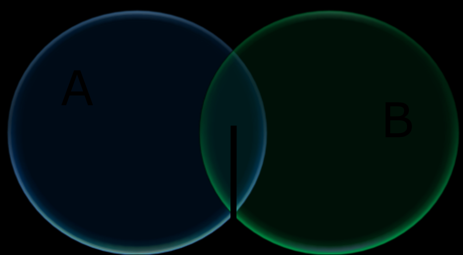


2 Caso - A $\cap$ B $\neq \varnothing$

Da teoria dos conjuntos, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

S



$A \cap B$

Dividindo membro a membro por n(S) $\neq$ 0 vem:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Daí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

O evento A $\cap$ B representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Exemplo:

Em uma urna com 25 bolas numeradas de 1 a 25 é extraída uma bola ao acaso. Qual a probabilidade do número sorteado ser múltiplo de 2 ou de 3?

Evento A: ocorre múltiplo de 2;

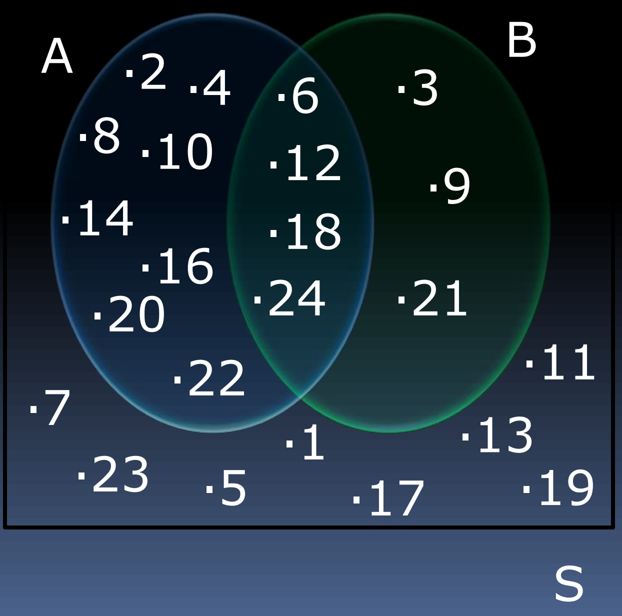
$\Rightarrow A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24\}$

Evento B: ocorre múltiplo de 3;

$\Rightarrow B = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$

Note que $A \cap B = \{6,12,18,24\}$

Daí, temos:



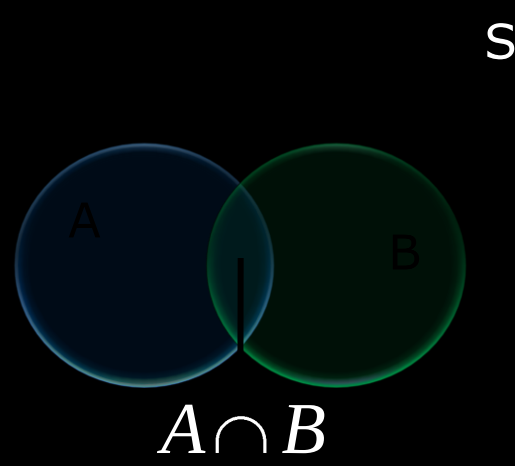
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12+8-4}{25} = \frac{16}{25}$$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, é indicada por P(A/B) e é dada por:

$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$



Também podemos fazer:

$$P(A/B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Exemplo:

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino de Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

Já voou antes?

Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontra-se organizados na tabela seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele está viajado pela primeira vez. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Seja A o evento: já conhecia Natal e
B o evento: viajado pela primeira vez.

Então, $n(A) = 35$, $n(B) = 106$ e $n(A \cap B) = 23$, como:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Daí,

$$P(A/B) = \frac{23}{106}$$

Eventos independentes

Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:

a) obtermos cara no segundo lançamento;

b) obtermos cara no segundo lançamento sabendo que obtivemos cara no primeiro.

Solução:

a) Seja c = cara, k = coroa e S o espaço amostral. Temos:

$S = \{(c,c), (c,k), (k,k), (k,c)\}$, $n(S) = 4$

O evento que queremos é: $A = \{(c,c), (k,c)\}$, $n(A) = 2$

Logo, $P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 = 1/2$

b) Temos dois eventos a considerar:

- cara no primeiro lançamento, $B = \{(c,c), (c,k)\}$, e
- cara no segundo lançamento, $A = \{(c,c), (k,c)\}$

Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na interseção de A e B: $P(A/B) = n(A \cap B)/n(B) = 1/2$

Observando as resposta dos itens a e b, temos: $P(A/B) = P(A) = 1/2$.

Definição:

Seja um espaço amostral S, finito e não vazio e sejam A e B eventos de S, dizemos que A e B são eventos independes se, e somente se:

$$P(A/B) = P(A) \text{ ou } P(B/A) = P(B)$$

Probabilidade da interseção de dois eventos

Seja S um espaço amostral finito e não vazio. A e B são eventos de S. Quando estudamos probabilidade condicional, vimos que,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ segue, imediatamente, a relação:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)}$$

Essa identidade é conhecida como teorema da multiplicação de probabilidades.

Se A e B forem eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo:

A probabilidade de um atirador X acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade do atirador Y acertar o mesmo alvo é 90%.

Se os dois atirarem uma vez, qual é a probabilidade de que:

a) ambos atinjam o alvo?

b) pelo menos um atinja o alvo?

Solução:

a) Note que: $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

$$= 0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72 = 72\%$$

b) Podem ocorrer três casos:

(X acerta e Y erra) ou (X erra e Y acerta) ou (X acerta e Y acerta)

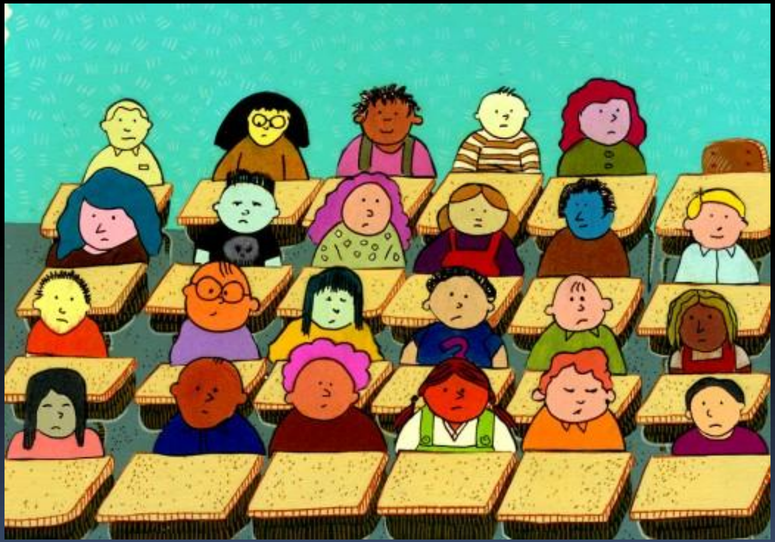
$$0{,}80 \cdot 0{,}10 \quad + \quad 0{,}20 \cdot 0{,}90 \quad + \quad 0{,}80 \cdot 0{,}90$$

$$0{,}08 \quad + \quad 0{,}18 \quad + \quad 0{,}72 = 0{,}98$$

Assim, a probabilidade é 98%.

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

1) De um grupo de 24 alunos, 14 frequentam o curso de Música clássica, 9 frequentam o curso de Artes plásticas e 6 frequentam ambos os cursos. Selecionando, ao acaso, um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de ele:



a) Frequentar o curso de Música clássica?
b) Frequentar o curso de Artes plásticas?
c) Não frequentar nenhum desses cursos?
d) Não frequentar o curso de Artes plásticas?

2) Uma cidade tem 50000 habitantes possui 3 jornais, A, B e C. Sabe-se que:

15 000 lêem o jornal A;

10000 lêem o jornal B;

8000 lêem o jornal C;

6000 lêem os jornais A e B

4000 lêem os jornais A e C

3000 lêem os jornais B e C

1000 lêem os três jornais.

Uma pessoa é selecionada ao acaso.

Qual a probabilidade de que:

a) ela leia pelo menos um jornal

b) leia só um jornal

3) (OBMEP 2011) Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

$a)\frac{1}{9}$ $b)\frac{1}{8}$ $c)\frac{2}{9}$ $d)\frac{3}{8}$ $e)\frac{3}{4}$

4) (OBMEP 2010) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

$a)\frac{3}{5}$ $b)\frac{5}{9}$ $c)\frac{1}{2}$ $d)\frac{2}{3}$ $e)\frac{3}{4}$

6) (OBMEP 2009) Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?

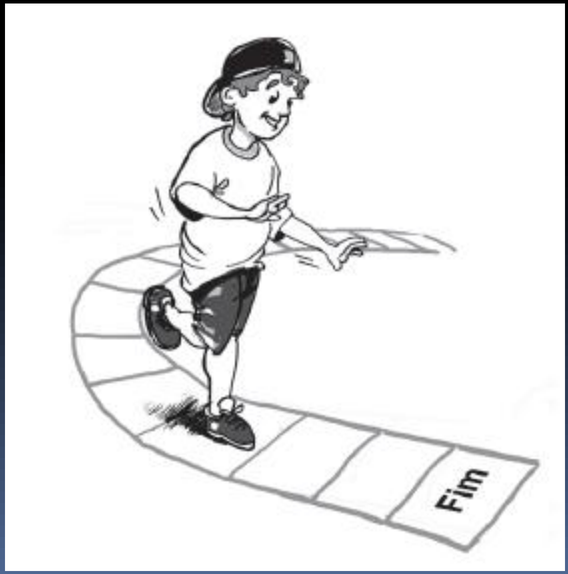
$a)\frac{1}{2}$ $b)\frac{2}{3}$ $c)\frac{3}{5}$

$d)\frac{3}{4}$ $e)\frac{4}{7}$

5) (OBMEP 2008) Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

$a)\,\frac{7}{8}$ $b)\,\frac{5}{6}$ $c)\,\frac{2}{3}$

$d)\,\frac{5}{8}$ $e)\,\frac{3}{4}$



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.