

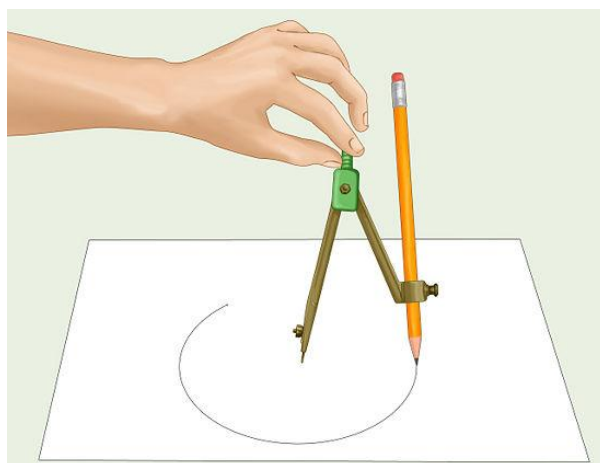


Campus Marechal Deodoro

Apostila de Matemática I

2º Anos

Professor: Edcarlos Pereira



SUMÁRIO

Conteúdo

Geometria Plana: circunferência, círculo e cálculo de áreas	4
Circunferência	4
Círculo	4
Cordas, Arcos e Diâmetro.....	4
Propriedades das Cordas.....	4
Posições relativas entre reta e circunferências.....	5
Reta externa à circunferência	5
Reta tangente à circunferência	5
Reta secante à circunferência	5
Posições relativas entre duas circunferências	5
Ângulos na circunferência	6
Perímetro da circunferência.....	7
Figuras planas (área e perímetro)	7
Quadrado	7
Retângulo	7
Paralelogramo	8
Triângulos	8
Hexágono regular	8
Trapézio.....	8
Losango	9
Área do círculo	9
Área do setor circular	9
Trigonometria e Suas Aplicações – Parte 1	10
Introdução.....	10
Situação-problema	10
Trigonometria no triângulo retângulo	10
Resoluções de Problemas	11
Ângulos notáveis	11
Trigonometria no círculo.....	12
Arcos e ângulos	12

Ângulo central	12
Medida e comprimento do arco	12
Medida angular	13
Medida de arcos: o grau.....	13
Medida de arcos: o radiano	13
Relação entre grau e radiano	13
Medida linear (comprimento).....	13
Relação entre o comprimento l e a medida do ângulo α (em graus) do arco:	13
Resoluções de Problemas	14
Referências.....	15

Geometria Plana: circunferência, círculo e cálculo de áreas

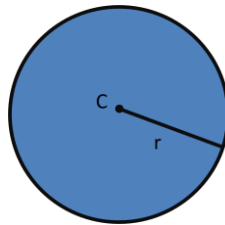
Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo. O ponto fixo é o centro C e a equidistância é o raio r da circunferência.



Círculo

Círculo ou **disco** é a reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos internos.

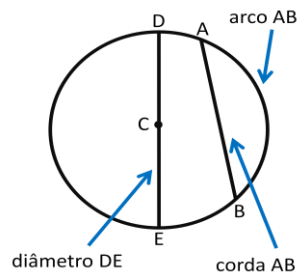


Cordas, Arcos e Diâmetro

Corda: é um segmento de reta que tem extremos na circunferência.

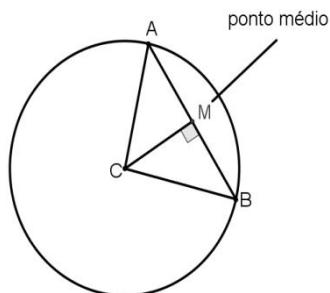
Arco: parte da circunferência determinada por pontos.

Diâmetro: é a maior corda da circunferência, passa pelo o centro C da circunferência.

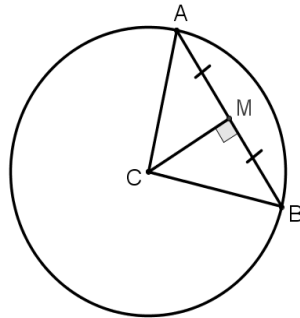


Propriedades das Cordas

Propriedade 1: Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C ao ponto médio M de uma corda é perpendicular a essa corda.

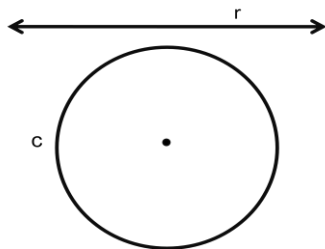


Propriedade 2: Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C a uma corda, perpendicularmente, encontra esta corda no ponto médio.



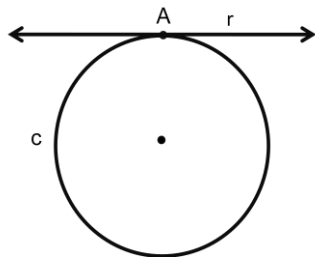
Posições relativas entre reta e circunferências

Reta externa à circunferência



Quando a reta r e a circunferência c não tem pontos em comum.

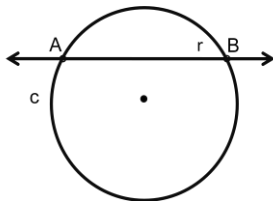
Reta tangente à circunferência



Quando a reta r e a circunferência c tem um único ponto em comum.

OBS: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

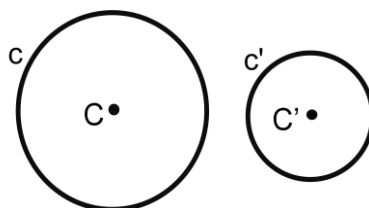
Reta secante à circunferência



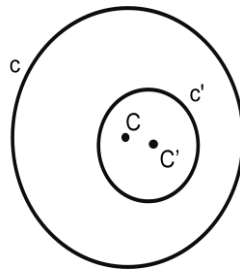
Quando a reta r e a circunferência c tem dois pontos distintos em comum.

Posições relativas entre duas circunferências

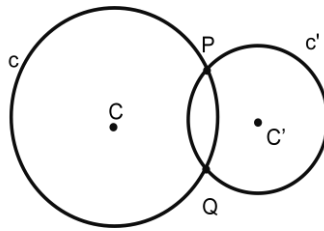
a) Não possuem pontos em comum e uma é **externa** à outra.



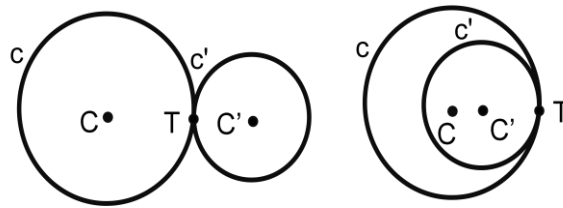
b) Não possuem pontos em comum e uma é **interna** à outra.



c) Possuem dois pontos em comum, sendo **secantes**.



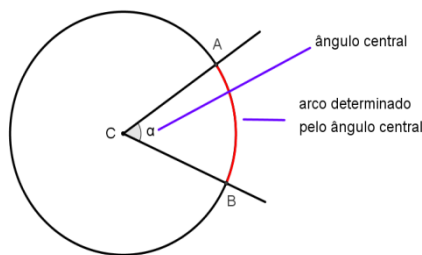
d) Possuem um ponto em comum, sendo **tangentes**.



Em duas circunferências tangentes, os centros C e C' e o ponto de tangência T são colineares.

Ângulos na circunferência

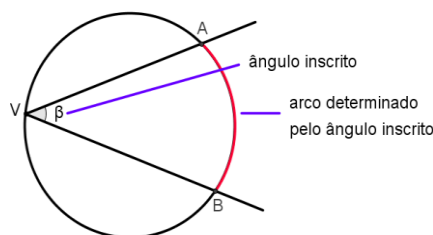
Ângulo central: é todo o ângulo que possui o vértice no centro da circunferência.



Obs: A medida do ângulo central α é igual a medida do arco AB, isto é,

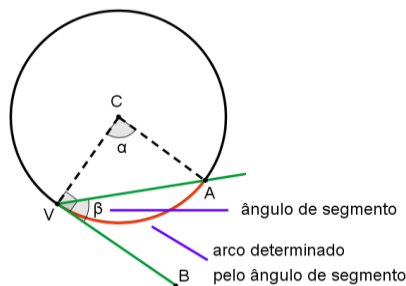
$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AB}) = \alpha.$$

Ângulo inscrito: é todo o ângulo que tem o vértice na circunferência, onde seus lados são secantes à ela.



A medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central que tem mesmo arco.
Acompanhe a demonstração no quadro.

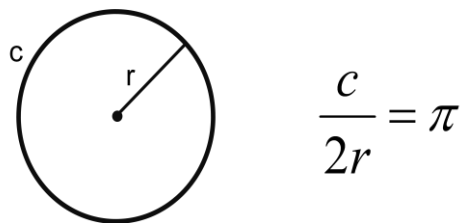
Ângulo de segmento: é todo ângulo em que o vértice pertence à circunferência, sendo um dos lados secante e o outro tangente.



A medida do ângulo de segmento é a metade da medida do ângulo central que tem mesmo arco, isto é, $\beta = \alpha/2$.

Perímetro da circunferência

Todas as circunferências são figuras semelhantes entre si. Portanto, a razão entre seu comprimento c e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante (representamos por π), isto é:



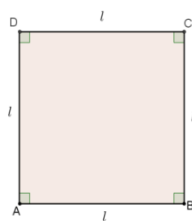
Isolando c nessa igualdade, vem:

$$c = 2\pi r$$

Nos cálculos de aproximação utilizamos $\pi \approx 3,14$.

Figuras planas (área e perímetro)

Quadrado

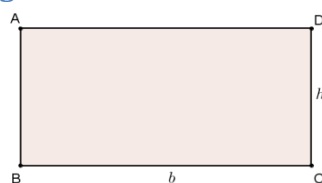


l é a medida do lado do quadrado

Área do quadrado é dada por: $A = l^2$

Perímetro do quadrado é dado por: $P = 4l$

Retângulo



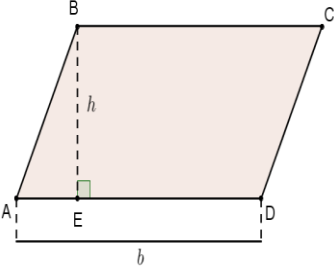
h é a medida da altura do retângulo

b é a medida da base do retângulo

Área do retângulo é dada por: $A = b \cdot h$

Perímetro do retângulo é dado por: $P = 2(b + h)$

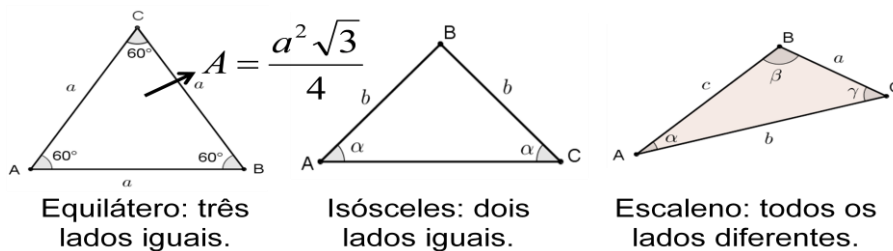
Paralelogramo

	h é a medida da altura do paralelogramo b é a medida da base do paralelogramo Área do paralelogramo é dada por: $A = b \cdot h$ Perímetro do paralelogramo é dado por: $P = 2b + 2l$
---	--

Triângulos

Triângulos: é todo polígono de três lados.

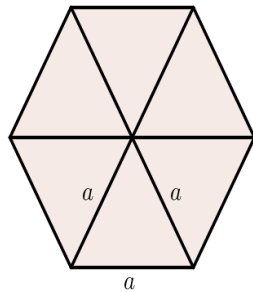
Tipos de triângulos (quanto a lado)



Área do triângulo é dada por: $A = b \cdot h / 2$ (onde b é base e h a altura do triângulo).

Perímetro do triângulo é dado por: $P = a + b + c$ (onde a, b e c são os lados do triângulo)

Hexágono regular



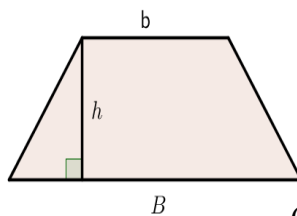
a é a medida do lado do hexágono.

Obs: Observe que o hexágono forma seis triângulos equilátero.

Área do hexágono é dada por: $A = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$

Perímetro do hexágono é dado por: $P = 6a$

Trapézio



b é a medida da base menor.

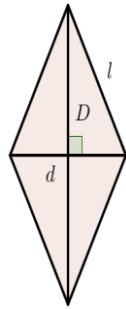
B é a medida da base maior.

h é a medida da altura.

Área do trapézio é dada por: $A = \frac{(B+b)h}{2}$

Perímetro do trapézio é dado por: $P = B + b + 2l$

Losango

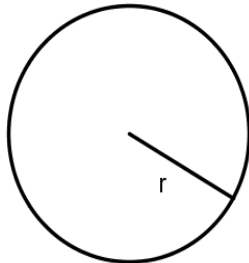


d é a medida da diagonal menor.
D é a medida da diagonal maior.
l é a medida do lado.

Área do losango é dada por: $A = \frac{Dd}{2}$

Perímetro do losango é dado por: $P = 4l$

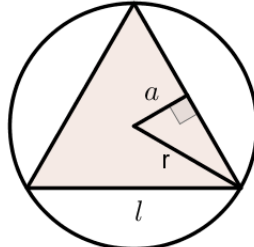
Área do círculo



Círculo de raio r.

Área do círculo é dada por: $A = \pi r^2$

A área de um polígono inscrito num círculo é dado por:

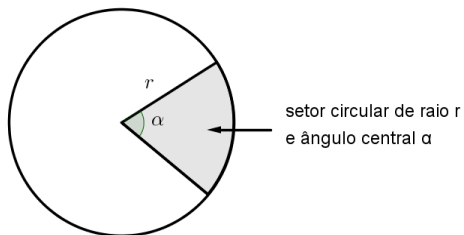


p é o perímetro do polígono.
a é apótema do polígono.

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

Acompanhe o raciocínio utilizando GeoGebra.

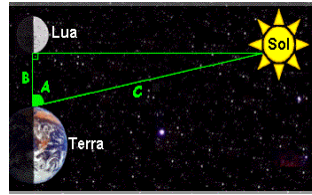
Área do setor circular



Para calcular a área do setor circular use regra de três.

Ângulo Central	Área
360°	πr^2
α	A_{setor}

Trigonometria e Suas Aplicações – Parte 1



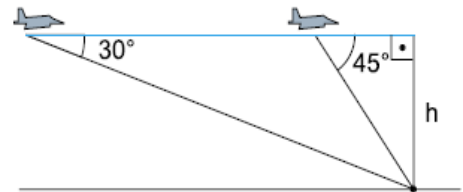
Introdução

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da Matemática e já está conosco desde a antiguidade para medir ângulos e distâncias com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre, a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas, tanto na matemática como na física.



Situação-problema

(UEPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45° .



Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400m/s?

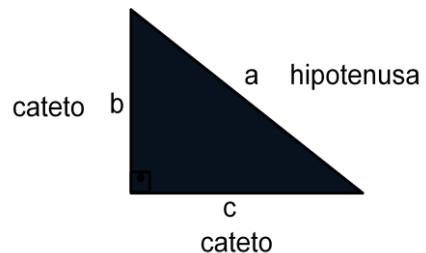
- a) $500(\sqrt{3}+1)m$ b) $600(\sqrt{3}-1)m$ c) $750\sqrt{3}m$ d) $1.500m$ e) $2.000m$

Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é todo triângulo que apresenta um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90° .

A hipotenusa é sempre o maior lado do triângulo retângulo, se opõe ao ângulo de 90° .

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos ($a^2 = b^2 + c^2$).



Trigonometria no triângulo retângulo

1) Qual é a razão entre a altura e percurso ao subir uma escada?

$$\frac{\text{altura}}{\text{percurso}} = \text{número } k_1 = \frac{b}{a}$$

Seno de um ângulo α de subida = k_1

$$\text{sen } \alpha = k_1 = \frac{b}{a}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo o seno de um ângulo α será dado por:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$



2) Qual é a razão entre o afastamento e percurso ao subir uma escada?

$$\frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}} = \text{número } k_2 = \frac{c}{a}$$

Cosseno de um ângulo α de subida = k_2

$$\cos \alpha = k_2 = \frac{c}{a}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo o cosseno de um ângulo α será dado por:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$



3) Qual é a razão entre a altura e o afastamento ao subir uma escada?

$$\frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \text{número } k_3 = \frac{b}{c}$$

Tangente de um ângulo α de subida = k_3

$$\operatorname{tg} \alpha = k_3 = \frac{b}{c}$$

Definição: Dado um triângulo retângulo a tangente de um ângulo α será dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$



Resoluções de Problemas

01) Mostre que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

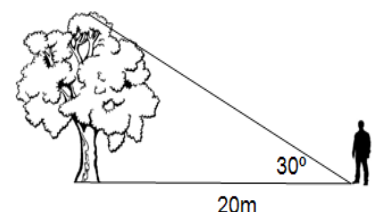
02) Verificar que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ângulos notáveis

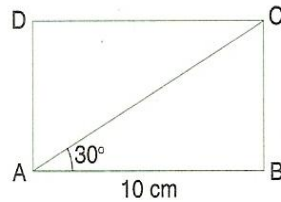
	30°	45°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

03) O ângulo de elevação do topo de uma árvore tomado a partir do pé de uma pessoa é de 30°. Sabendo-se que a árvore está distante 20m do pé da pessoa, que medida tem a árvore aproximadamente?

a) 5,5m b) 11,5m c) 15m d) 20m e) 40m



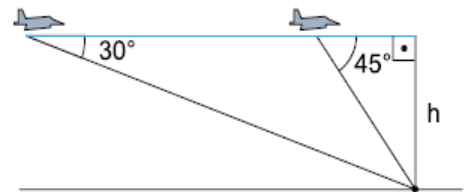
04) Seja o retângulo ABCD ao lado. Determine sua área e o perímetro do triângulo ABC.



05) Um barqueiro cobra R\$ 0,25 por metro navegado. De um lado da margem da lagoa, avista-se o topo de um poste na outra margem sob um ângulo de 45° , em relação ao plano horizontal. Sabendo que o poste tem altura de 20 metros. Quanto o barqueiro recebe em cada transporte que faz?

a) R\$ 2,00 b) R\$ 3,00 c) R\$ 4,00 d) R\$ 5,00 e) R\$ 10,00

06) (UEPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45° .



Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400m/s?

a) $500(\sqrt{3}+1)m$ b) $600(\sqrt{3}-1)m$ c) $750\sqrt{3}m$ d) $1.500m$ e) $2.000m$

Trigonometria no círculo

Arcos e ângulos

Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.

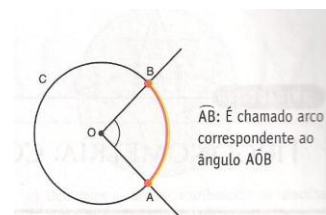


Ângulo central

Todo ângulo central possui um arco correspondente, e reciprocamente, a todo arco corresponde um ângulo central.

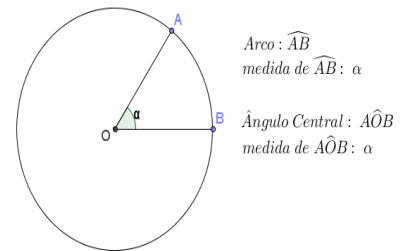
Medida e comprimento do arco

Existem duas formas de medirmos um arco de circunferência. Angular e Linear.

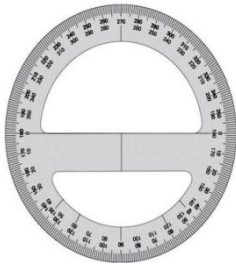


Medida angular

A medida do ângulo central α é igual a medida angular do arco AB. Para medida angular (medida) de um arco, usamos o **grau** ou o **radiano**.



Medida de arcos: o grau



O grau é definido, dividindo-se uma circunferência em 360 partes iguais. Cada uma dessas partes, corresponde a um arco de um grau (1°).

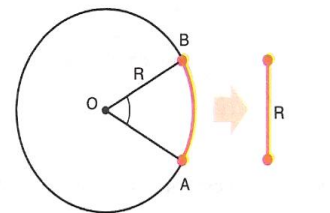
Transferidor usado para medir ângulos.

Medida de arcos: o radiano

Observe o arco AB da circunferência, em que o comprimento é igual a medida do raio:

Dizemos que, a medida do arco AB ou do ângulo central AOB, é igual a 1 radiano (1 rad).

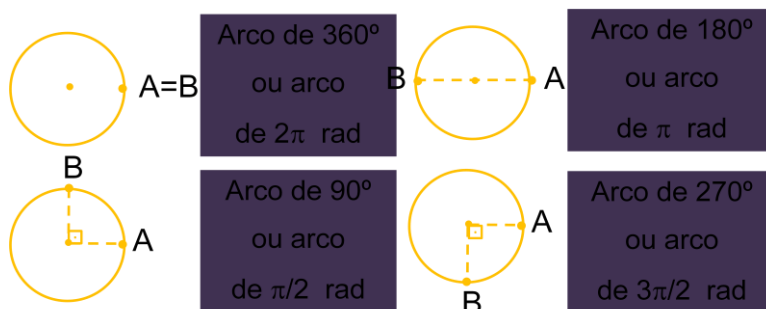
Assim, dizemos que um arco AB que possui comprimento igual ao raio da circunferência, mede 1 radiano.



Relação entre grau e radiano

Sabemos que o comprimento C da circunferência de raio r é igual a $C = 2\pi r$, em que $\pi = 3,141592\dots$

Como cada raio r corresponde 1 rad, podemos afirmar que o arco correspondente à circunferência mede $2\pi r = 2\pi \cdot 1 \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$

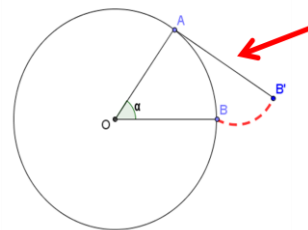


Medida linear (comprimento)

A medida linear de um arco é a medida angular de seu comprimento.

Se pudéssemos “esticar” esse arco, seria possível medir seu comprimento.

Para medida linear (comprimento) de um arco, usaremos: metros, centímetros, milímetros, etc.



Relação entre o comprimento l e a medida do ângulo α (em graus) do arco:

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C=2\pi r$.

Medida de uma circunferência em graus: 360°

Comprimento (linear)	Medida (angular)
$2\pi r$	360°
ℓ	α

Segue que: $\ell = \alpha \cdot r$

Resoluções de Problemas

1) Converter 30° em radianos.

Graus	Radianos
180°	π
30°	x

2) Converter $3\pi/4$ em graus.

Graus	Radianos
180°	π
x	$3\pi/4$

3) Calcule, em radianos, a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15cm contido numa circunferência de raio 3cm.

4) O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 12cm. Quantos centímetros sua extremidade percorre durante 25 minutos?

5) Um pêndulo tem 15cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60° . Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

Referências

Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.