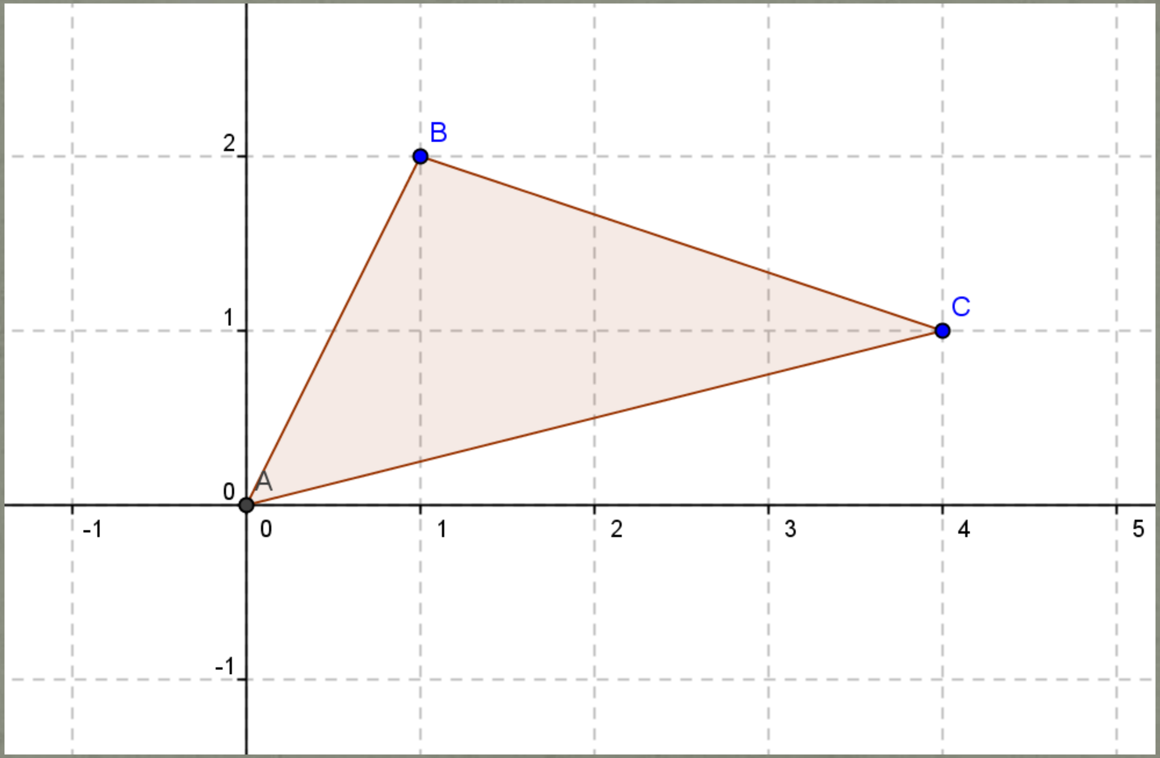
DETERMINANTES E SUAS APLICAÇÕES

PROF. EDCARLOS PEREIRA

Situação-problema

Determinar a área da região triangular que tem como vértices os pontos A(0,0), B(1,2) e C(4,1).



Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Observação: Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por detA), substituímos os parênteses ou colchetes da matriz por barras simples.

- $A = (4)\ e\ detA = |4|$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\ e\ detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\ e\ detA = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Determinante de uma matriz de ordem 1

O Determinante da matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Exemplo:

- $A = (-3) \rightarrow detA = |-3| = -3$

Determinante de matriz de ordem 2

O Determinante da matriz quadrada A de ordem 2 é a diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária.

Exemplo:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-3) = 8 - 3 = 5$

Determinante de uma matriz de ordem 3

O Determinante da matriz quadrada A de ordem 3, pode ser calculado pela **regra de Sarrus**, conforme o procedimento explicado no exemplo abaixo.

Exemplo: Seja a matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.
2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

10 -8 0

Continuando

3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção, os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

-6 12 0 10 -8 0

4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos em 2 (setas azuis) e em 3 (setas vermelhas), nessa ordem.

Então, detA = (10 – 8 + 0) – (– 6 + 12 +0) = 2 – 6 = – 4

Resoluções de Problemas

1) Dado um triângulo ABC, com coordenadas cartesianas dos vértices, podemos calcular sua área por meio de determinante usando a fórmula:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \; em\ que\ D = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$$

Nessa fórmula, |D| é o módulo do determinante de ordem 3, tal que: a 1ª coluna é formada pelas abscissas dos pontos, a 2ª pelas ordenadas, e a 3ª por 1.

Determinar a área da região triangular que tem como vértices os pontos A(0,0), B(1,2) e C(4,1).

2) (Regra de Cramer) Dado um sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de equações pela fórmula:

$$x = \frac{D_x}{D} \ \ e \ \ y = \frac{D_y}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \ Dx = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \ e \ D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ pela regra de Cramer

3) (PUC-MG) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

É correto afirmar que o valor do determinante da matriz AB é:

a) 32 b) 44 c) 51 d) 63 e) 88

$$4)\ \text{(Cefet - PR)}\ Se \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad então \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad vale:$$

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

5) (Fuvest-SP) O número de raízes da equação

$$\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad é:$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

6) (UFV-MG) A solução da equação

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \quad é:$$

a) -2 b) 2 c) -1 d) 1 e) 0

SISTEMAS LINEARES E SUAS APLICAÇÕES

PROF. EDCARLOS PEREIRA

Sistemas lineares

Equação linear

Introdução

Ana foi sacar R$ 70,00 em um caixa eletrônico que só dispunha de notas de R$ 10,00 e R$ 20,00. Como pode ser feita a distribuição das notas a fim de totalizar R$ 70,00?

Vamos representar por:

- x o número de notas de R$ 10,00
- y o número de notas de R$ 20,00

Então temos:

$$10 \cdot x + 20 \cdot y = 70$$

A equação obtida acima é um exemplo de equação linear.

Definição: Chama-se equação linear toda equação que pode ser escrita da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

na qual.

- x_1, x_2...,x_n são as incógnitas.
- a_1, a_2, ..., a_n são coeficiente reais.
- b é o termo independente.

Exemplos de equações lineares

- $4x + 3y = 2$
- $x - 3y + z = -3$
- $3x - y = 0$

Exemplos de equações não lineares

- $x^2 + y^2 = 9$
- $x + 2yz = 0$
- $x^3 + y^2 = 10$

Solução de uma equação linear

Dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$ é solução da equação se, e somente se, a sentença:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$$

for verdadeira.

Exemplos:

a) Uma solução da equação linear $2x + 3y = 23$ é o par ordenado (4,5), pois $2\cdot4 + 3\cdot5 = 23$.
b) Uma solução da equação linear $3x + y – z = 9$ é o terno ordenado (4,0,3), pois $3\cdot4 + 0 – 3 = 9$.

Sistema linear

Denomina-se sistema linear mxn o conjunto S de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado assim:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos:

$$a)\ \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$$

Solução de um sistema linear

Dizemos que (α_1, α_2,..., α_n) é solução de um sistema linear quando (α_1, α_2,..., α_n) é solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplos:

$$1)\ (5,1)\ \textit{é solução do sistema}\ \begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-5y=10 \end{cases},\ \ pois\ \begin{cases} 2\cdot 5+3\cdot 1=13 \\ 3\cdot 5-5\cdot 1=10 \end{cases}$$

$$2)\ (1,3,-2)\ \textit{é solução do sistema}\ \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x-y-z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}.\ \textit{Verifique.}$$

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções.

Sistema possível e determinado (SPD) é todo sistema linear que admite uma única solução.

Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

É um SPD, pois admite uma única solução, isto é, (5,1).

Sistema possível e indeterminado (SPI) é todo sistema linear que admite mais de uma solução.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

É um SPI, pois admite mais de uma solução: (2,1), (4,0), (0,2). Solução geral: (4-2y,y) sendo y variável livre.

Sistema impossível (SI) é todo sistema linear que não admite solução alguma.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

É um SI, pois não admite solução alguma.

Resumo:

Determinado (SPD)
(uma única solução)

Possível

Indeterminado (SPI)
(mais de uma solução)

Sistema linear

Impossível (nenhuma solução) (SI)

Sistemas escalonados

Um sistema escalonado é aquele no qual, a cada equação, uma nova incógnita possui coeficiente nulo, anulando assim uma quantidade considerável de incógnitas no sistema.

Exemplos:

$$a)\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ y+2z=-3 \\ 3z=-6 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x-2y+z=-5 \\ 0x+y+2z=-3 \\ 0x+0y+3z=-6 \end{cases}$$

1º tipo: Sistema com número de equações igual ao número de incógnitas (SPD).

$$b)\begin{cases} 4x-y+5z=3 \\ 3y-2z=1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} 4x-y+5z=3 \\ 0x+3y-2z=1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$$

2º tipo: Sistema com número de equações menor que o número de incógnitas (SPI).

OBS: Caso ocorra uma equação 0x+0y+0z=b, b≠0 (SI)

Escalonamento de sistemas lineares

Quando o sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele, que esteja escalonado, por meio de algumas operações elementares.

Exemplos:

a) Escalone, classifique e resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 21 \\ x + 2y + z = 7 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases}$$

- Troque a posição das equações se necessário.

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 21 \\ x + 2y + z = 7 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases}$$

- Para anular os coeficientes de x na 2ª e 3ª equação podemos fazer:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \quad \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{cases}$$

Depois, podemos trocar as posições duas últimas equações e anule o coeficiente y na 3ª equação.

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3y-z=7 \\ y+5z=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+5z=13 \quad \cdot(-3) \\ \qquad\qquad\qquad + \\ 3y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+5z=13 \\ -16z=-32 \end{cases}$$

Sistema linear escalonado
1 tipo - SPD.

Podemos agora resolver:

- $z=\dfrac{-32}{-16} \quad \Rightarrow z=2$
- $y+5\cdot 2=13 \Rightarrow y=13-10 \Rightarrow y=3$
- $x+2\cdot 3+2=7 \quad \Rightarrow x=7-6-2 \Rightarrow x=-1$

Portanto, é um SPD, com S = (-1,3,2).

b) Escalone e resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

- Anule os coeficientes de x da 2ª e 3ª equação.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \qquad\quad + \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

- Anule o coeficiente de y da 3ª equação.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \quad \cdot(-1) \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \\ 5y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

Sistema linear escalonado
2 tipo – SPI.

- Para encontramos a solução geral, escolha uma variável(z) livre na 2ª equação e coloque em evidência a outra variável(y).

$$5y + 4z = 2 \Rightarrow y = \frac{2 - 4z}{5}$$

- Substitua y na 1ª equação.

$$x - 2\left(\frac{2 - 4z}{5}\right) - z = 0 \Rightarrow x - \left(\frac{4 - 8z}{5}\right) - z = 0$$

- Coloque em evidência a variável x.

$$x = \left(\frac{4 - 8z}{5}\right) + z \Rightarrow x = \frac{4 - 3z}{5}$$

$$Portanto,\ é\ um\ SPI,\ com\ SG = \left(\frac{4 - 3z}{5}, \frac{2 - 4z}{5}, z\right).$$

c) Escalone e resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ 3x - 6y + 15z = 11 \end{cases}$$

- Anule o coeficiente de x da 2ª equação.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 & \cdot(-3) \\ & + \\ 3x - 6y + 15z = 11 \hookleftarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

Portanto, é um sistema impossível (SI), S = $\emptyset$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

EXTRA - MATRIZ INVERSA

Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Diz-se que B é a Inversa de A se e só se $A.B = I_n$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I_n}$$

1) Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Designando a inversa por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Impondo a condição $A.A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+5b & c+5d \\ 2a & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+5b=1 \\ 2a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c+5d=0 \\ 2c=1 \end{cases}$$

$$a=0 \quad b=\frac{1}{5} \quad c=\frac{1}{2} \quad d=-\frac{1}{10}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÕES:

- Uma matriz que não admite inversa é chamada de singular.
- Se a matriz A é inversível então ela é quadrada.
- Se a matriz A é inversível, então a sua inversa é única.

PROPRIEDADES:

Sendo A e B matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, temos as seguintes propriedades;

- $(A^{-1})^{-1} = A$