MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES

PROF. EDCARLOS PEREIRA

INTRODUÇÃO

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns exemplos:

Os 7 Homens mais ricos do mundo (2013)

Ordem	Nome	Fortuna	País
1	**Bill Gates**	**US $ 73.4 Bi**	**EUA**
2	**Carlos Slim**	**US$ 69.5 Bi**	**México**
3	**Warren Buffett**	**US$ 60.3 Bi**	**EUA**
4	**Amâncio Ortega**	**US$ 55.6 Bi**	**Espanha**
5	**Ingvar Kamprad**	**US$ 54.5 Bi**	**Suécia**
6	**Charles Koch**	**US$ 45.6 Bi**	**EUA**
7	**David Koch**	**US$ 45.6 Bi**	**EUA**

Fonte: TOP10+. Disponível em: www.top10mais.org. Acesso em: 19/08/2013

Outra tabela

Olimpíadas de Londres 2012

Ordem	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º	Estados Unidos	46	29	29	104
2º	China	38	27	23	88
3º	Reino Unido	29	17	19	65
22º	Brasil	3	5	9	17

Veja também

Uma dona de casa precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja a tabela com os preços pesquisados.

	Produto			
Supermercado	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Essa consumidora precisa de:

Produto	Quantidade
farinha	4 kg
açúcar	3 kg
leite	3 ℓ
Ovos	1 dz

Qual dos supermercados ela gastaria menos?

Definição

Chamamos de matriz *mxn* qualquer tabela formada por m.n elementos (i n co

	Produto			
Supermercado	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

O entre colchetes ou entre parênteses.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix}$$

é uma matriz do tipo 2x4, pois tem 2 linhas e 4 colunas

$$\begin{bmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{bmatrix}$$

Representa os preços pesquisados nos dois supermercados pela dona de casa.

Outros exemplos:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

é uma matriz do tipo 3x3, pois tem 3 linhas e 3 colunas.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

é uma matriz do tipo 3x1, pois tem 3 linhas e 1 colunas, recebe o nome especial de matriz **coluna**.

$$\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

é uma matriz do tipo 1x3, pois tem 1 linhas e 3 colunas, recebe o nome especial de matriz **linha**.

Representação dos Elementos da Matriz

Um elemento qualquer é representado por a_{ij}, onde i representa a linha e j a coluna, onde o elemento se encontra localizado em uma matriz A.

Exemplo:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- o elemento 2 está na linha 1 e coluna 1; indicamos $a_{11}= 2$.
- o elemento 4 está na linha 1 e coluna 2; indicamos $a_{12}= 4$.
- segue, $a_{13}= -1$, $a_{21}= 6$, $a_{22}= 0$ e $a_{23}= 9$.

Representação de uma matriz

Representamos genericamente uma matriz A do tipo *mxn* da seguinte maneira:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para simplificar, utilizaremos $A = (a_{ij})_{mxn}$.

Exemplo 1:

Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x2}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Resolução:

Primeiro, escreva a matriz A genericamente:

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Depois, calcular o valor de cada elemento a_{ij} pela lei $a_{ij} = i + j$.

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{12} = 1 + 2 = 3$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{31} = 3 + 1 = 4$

$a_{32} = 3 + 2 = 5$

Daí, temos a matriz: $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Exemplo 2:

Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{ij} = 2i^2 - j$.

Resolução:

Primeiro, escreva a matriz A genericamente:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Depois, calcular o valor de cada elemento a_{ij} pela lei $a_{ij} = 2i^2 - j$.

$a_{11} = 2.1^2 - 1 = 1$ $\quad$ $a_{21} = 2.2^2 - 1 = 7$

$a_{12} = 2.1^2 - 2 = 0$ $\quad$ $a_{22} = 2.2^2 - 2 = 6$

$a_{13} = 2.1^2 - 3 = -1$ $\quad$ $a_{23} = 2.2^2 - 3 = 5$

Daí, temos a matriz: $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Algumas matrizes especiais

- Matriz quadrada

É uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

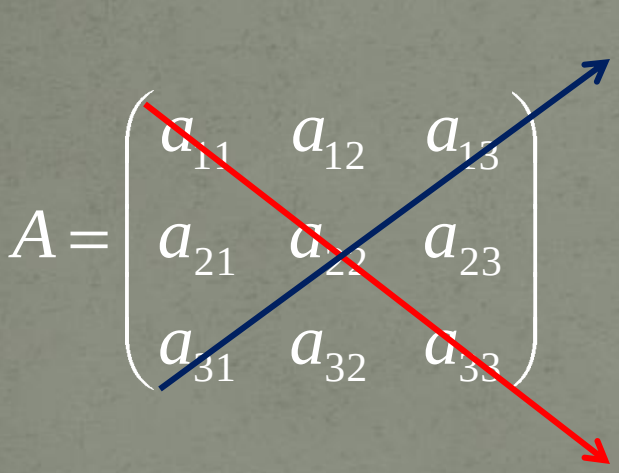
$A = (7)$ é uma matriz 1 x 1 ou, simplesmente, matriz de ordem 1.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matriz de ordem 2.

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ matriz de ordem 3.

Observação:

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que i = j formam a diagonal principal na matriz, e os elementos a tais que i + j = n + 1 formam a diagonal secundária.



❑ Matriz triangular:

É uma matriz quadrada, cujos elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ Matriz transposta:

Dada uma matriz A, chamamos a matriz transposta A^t à matriz obtida de A trocando-se, ordenadamente, suas linhas por colunas.

Exemplo:

A transposta de $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -2 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ *é* $A^t_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

❑ Matriz Identidade

É uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a zero.

Exemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❑ Matriz nula

É uma matriz com todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula, do tipo 2 x 3, também indicada por 0_{2x3}.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais se, e somente se, tem seus elementos correspondentes iguais.

Exemplos 1:

Determine x e y, sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 4 \\ 3 & 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Resolução

Devemos ter:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos x = 5 e y = 2.

Exemplos 2:

Sabendo-se que: $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$

determine os valores de: a, b, c e d.

Resolução

Note que,

- $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.
- $a + b = 9 \Rightarrow a + 3 = 9 \Rightarrow a = 6$.
- $b + c = -1 \Rightarrow 3 + c = -1 \Rightarrow c = -4$.
- $2a - 3d = 18 \Rightarrow 2.6 - 3d = 18 \Rightarrow d = -2$.

Adição e subtração de matrizes

Agora utilizaremos planilhas eletrônicas, software Excel, verificando a prática da adição e subtração de matrizes.

Abrir arquivo das planilhas eletrônicas

Adição de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem mxn, denominamos soma da matriz A com a matriz B à matriz C, cujos elementos são obtidos quando somamos os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indicamos: C = A + B

Exemplo. Sejam as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz C = A + B, basta somar os elementos correspondentes de A e B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 2+3 & 4+5 \end{pmatrix}$$

Portanto, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Subtração de matrizes

Definição: A diferença entre duas matrizes, A e B, de mesmo tipo é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, A – B = A + (-B).

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz A e k um número real, então k.A é uma matriz do tipo *mxn* obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Exemplo:

$$Se\ A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\ e\ k = 3,\ então:$$

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 & 3.6 \\ 3.(-2) & 3.2 \\ 3.3 & 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 6 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Voltemos ao exemplo da introdução:
Uma dona de casa precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja a tabela com os preços pesquisados.

	Produto			
Supermercado	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Essa consumidora precisa de:

Produto	Quantidade
farinha	4 kg
açúcar	3 kg
leite	3 ℓ
Ovos	1 dz

Qual dos supermercados ela gastaria menos?

Para saber em qual dos supermercados ela gastaria menos, podemos calcular:

Supermercado A→ (1,72).4+(1,90).3+(1,55).3+(3,00).1=20,23
Supermercado B→ (1,76).4+(1,24).3+(1,72).3+(3,94).1=19,86

Ta de m

	Produto			
Supermercado	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 \end{pmatrix}$$

remos : $C = P.Q$

Produto	Quantidade
farinha	4 kg
açúcar	3 kg
leite	3 ℓ
Ovos	1 dz

Os elementos de uma linha de P são multiplicados, ordenadamente, pelos correspondentes elementos da coluna de Q e, depois, os produtos são somados:

$$P \cdot Q = C$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}72 \cdot 4 + 1{,}90 \cdot 3 + 1{,}55 \cdot 3 + 3{,}00 \cdot 1 \\ 1{,}76 \cdot 4 + 1{,}24 \cdot 3 + 1{,}72 \cdot 3 + 3{,}94 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$C = \begin{pmatrix} 20{,}23 \\ 19{,}86 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Supermercado A.} \\ \text{Supermercado B.} \end{matrix}$$

Portanto, no supermercado B a dona de casa gastará menos.

Definição de multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{mxp}$ e $B = (b_{ij})_{pxn}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento de linha *i* de A pelo correspondente elemento da coluna *j* de B.

Observação: O produto da matriz A por B, só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linha de B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}_{2x3}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}_{3x2}$

determinar A·B.

Note que, o número de colunas de A é igual a número linhas de B. Então, A.B = C.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+0\cdot5+1\cdot3 & 2\cdot1+0\cdot4+1\cdot1\\ 1\cdot0+3\cdot5+4\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot4+4\cdot1\end{pmatrix}$$

Logo, $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 27 & 17\end{pmatrix}$

Resoluções de Problemas

1) (PUC-MG) Seja A a matriz $A=(a_{ij})_{2x3}$, cuja lei de formação é dada abaixo:

$$a_{ij}=\begin{cases} 3i+j, & se\ i\neq j \\ 2i-3j, & se\ i=j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

$$a)A=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)A=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$c)A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad d)A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

2) (UFC-CE) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de ordem 2x2.

Então, pode-se afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} n & n^2 \\ 0 & n \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} n & n \\ 0 & n \end{pmatrix}$

3) O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência de pessoas na casa, em um final de semana, e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

	rapazes	moças
sábado	**80**	**60**
domingo	**?**	**75**

O gerente se esqueceu de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias havia sido a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes R$ 15,00 e para moças é R$ 12,00:

a) represente, por meio da multiplicação de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa de cada dia e determine o valor do campo que ficou sem ser preenchido.

4) A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos aluno A, B e C nas provas de Português, Matemática e Conhecimentos Gerais em um exame vestibular:

	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 3 (em português), 2 (em matemática) e 1 (em conhecimentos gerais). Determine a pontuação de cada um por meio de multiplicação de matrizes?

Referências Bibliográficas

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.
- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.