# Derivada e Suas Aplicações.

Edcarlos Pereira

# INTRODUÇÃO

Estudar o comportamento de uma função significa obter informações, como taxa de variação, intervalos de seu domínio nos quais ela é crescente ou decrescente, pontos de máximos e de mínimo, sem necessariamente conhecer seu gráfico. Significa, portanto, descrever suas características, e o conceito de derivada nos possibilita fazer isso.

# Incremento de uma variável

Qualquer acréscimo ou variação em uma variável $x$ é chamado de *incremento. O incremento pode ser positivo ou negativo.*

Exemplo:

Se a temperatura era 25ºC às 12 horas e 29ºC às 15 horas, então o incremento (ou variação) na temperatura foi de 4ºC. Podemos representar por:

$\Delta T = T_2 - T_1 = 29 - 25 = 4 \therefore \Delta T = 4^{o}C$

# Incremento de uma função

Quando uma variável y é dada em função de outra variável x ($y=f(x)$), então, para qualquer incremento (acréscimo) $\Delta x$ dado por x, há um incremento $\Delta y$ correspondente em y dado por:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Exemplo:

Para a função definida por $y = f(x) = x^2 + 2x$, se x varia de 3 para 7, calcule o incremento $\Delta x$ e $\Delta y$.

Acompanhe no quadro.

# Razão entre incrementos: taxas média de variação

A razão entre o incremento de uma função y e o incremento de uma variável x é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Essa razão chama-se *razão incremental*.

Exemplo:

Na função $y = f(x) = x^2 + 2x$, quando x varia de 3 para 7. Calcule a razão incremental.

Acompanhe no quadro.

# Taxa de variação instantânea

Em muitos problemas, não é satisfatório considerar a média de uma taxa de variação, mas sim uma taxa de variação instantânea, ou seja, a rapidez com que y = f(x) varia em um dado ponto $x_1$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplo:

Considere a função $y = x^2$. Calcule a taxa de variação instantânea para x = 4. E depois utilize incremento cada vez menores, isto é, $\Delta x$ "tende a zero".

Acompanhe no quadro.

# Derivada

Definição: Considere uma função f: I $\rightarrow$ IR, definida em um intervalo, I e $x_0$ um ponto desse intervalo. A razão incremental em $x_0$ é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A derivada da função y = f(x), em $x_0$, é o limite, se existir, da razão incremental quando $\Delta$x tende a zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A derivada de *f* em $x_0$ *é representada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ou \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# Cálculo da derivada

Vamos determinar a derivada $f'(x_0)$ da função $y = f(x) = x^2$, no ponto $x_0$.

Acompanhe no quadro.

# Derivada de algumas funções elementares

Função afim: $f(x) = ax + b$

$f'(x) = a$

Função identidade: $f(x) = x$

$f'(x) = 1$

Função constante: $f(x) = k$

$f'(x) = 0$

Função potência com expoente natural:

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

Produto de uma constante por uma função:

$g(x) = c.f(x)$

$g'(x) = c.f'(x)$

# Aplicação da derivada

## Velocidade média

Sabemos que a velocidade média é dada pela taxa de variação da distância em relação ao tempo.

Vamos supor que um veículo passe pelo ponto A num determinado instante e, 5 segundos mais tarde, passe pelo ponto B, sendo a distância entre A e B de 200 metros.

Temos: A distância AB é chamada de $\Delta$s (o incremento na distância) e o tempo de 5 segundos é $\Delta$t (o incremento no tempo). Logo,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200m}{5s} = 40m/s$$

## Velocidade instantânea num ponto

Para obter a velocidade instantânea no ponto A, fazemos $\Delta t$ cada vez menor e tendendo a zero. Assim, $\Delta s$ também tende a zero.

A velocidade instantânea no ponto A será o limite da razão $\Delta s/\Delta t$ quanto $\Delta t$ tende a zero, isto é:

$$\text{velocidade instantânea } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ou seja, a velocidade instantânea num ponto é a derivada de S em relação a t nesse ponto. Indicamos por:

$$v(t) = S'(t)$$

Exemplo:

Um ponto material se move sobre uma trajetória qualquer segundo a função horária $S(t) = t^2 - 2t + 5$, onde S é dado em metros (m) e t é dado em segundos (s). Vamos determinar a velocidade instantânea do ponto material no instante t = 3 s.

Acompanhe no quadro a solução.

Aceleração

O conceito de aceleração está relacionado com a variação de velocidade. Mas não basta saber quanto variou a velocidade; é necessário saber também em que intervalo de tempo essa variação ocorreu ou instante.

## Aceleração média e instantânea

Sabemos que a aceleração média é a aceleração do móvel calculada em certo intervalo de tempo, que é dada por: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

A aceleração instantânea é a aceleração do móvel em determinado instante, ou seja, num intervalo de tempo infinitamente pequeno, isto é, quando $\Delta$t tende a zero.

Para obter a aceleração instantânea num ponto, fazemos $\Delta$t tender a zero. Assim, $\Delta$v também tende a zero. A aceleração instantânea *a* é indicada por:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' \quad (derivada\ da\ velocidade)$$

Exemplo:

Uma partícula se move de acordo com a função $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5$ (**S** em metros e **t** em segundos). Vamos determinar:

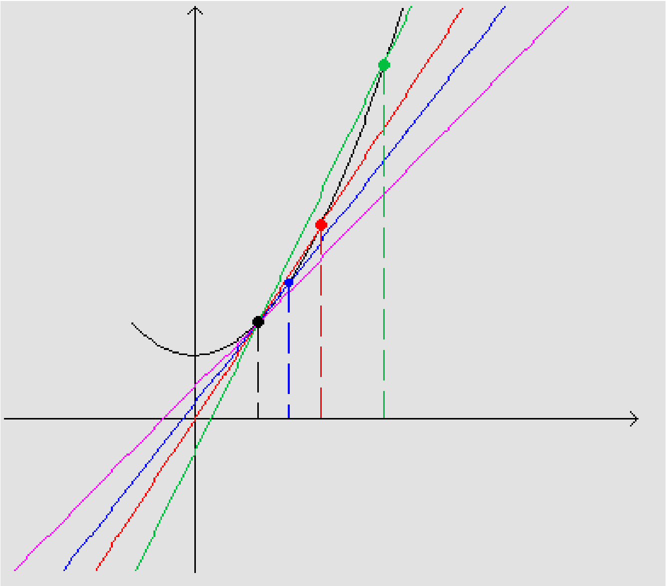
a) a posição, a velocidade e a aceleração para $t = 0$ e $t = 2$

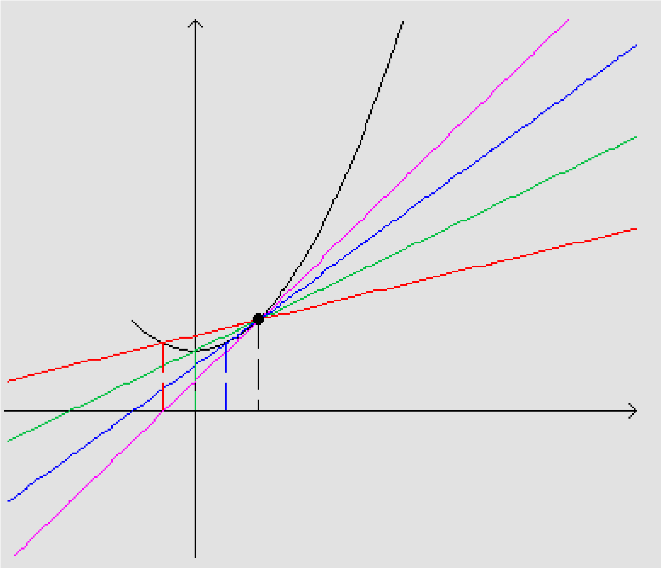
b) quando e onde a partícula para.

Acompanhe no quadro a solução.

# Interpretação Geométrica da Derivada

## Coeficiente angular de uma reta





Conforme $\Delta x$ se aproxima de zero, o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ "se aproxima" do ponto $(x_0, f(x_0))$, e a reta continua **secante** ao gráfico, sendo determinada por dois pontos cada vez mais próximos.

Na posição limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$.

$$f'(x) = m = tg\alpha$$

# Estudo do comportamento de funções

Podemos estudar o comportamento de uma função por meio das derivadas: para quais intervalos do seu domínio a função é crescente ou decrescente e quais são seus valores máximos ou mínimos, quando existirem.

Seja f(x) uma função derivável para todo x.

1) Se $f'(x) > 0$, então f é crescente.
2) Se $f'(x) < 0$, então f é decrescente.
3) Se $f'(x) = 0$, em $x \in [a,b]$, então $f(x) = k$, $x \in [a,b]$.

Exemplos:

1) Em que conjunto $f(x) = -2x + 2$, $x \in IR$, é crescente?

2) Verificar para que valores de x a função é crescente e decrescente e encontrar o valor mínimo ou máximo da função quadrática $y = f(x) = - x^2 + 4x – 3$.

Acompanhe no quadro a solução.

# Resoluções de problemas

1) (PUC-SP) Uma partícula movimenta-se sobre uma reta, e a lei horária do movimento é dada por $S = 2t – 5t – 2$ (SI). A aceleração escalar do movimento é:

a) 2 m/s b) 4 m/s c) – 5 m/s
d) – 7 m/s e) zero

2) Um ponto material se move de acordo com a função horária $S(t) = 2t^2 – 24t + 6$ (S dado em metros e t dado em segundos). Determine em que instantes o ponto material tem velocidade:

a) crescente; b) decrescente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.