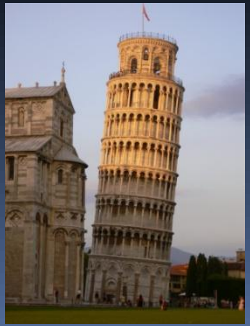
Edcarlos Pereira

GEOMETRIA ESPACIAL E SUAS APLICAÇÕES.

Introdução

O estudo das mais variadas formas geométricas sempre instigou a mente humana. Um destaque nesse campo de interesse são as figuras que hoje denominamos **sólidos geométricos,** que abrangem os **poliedros** e os **corpos redondos.** Um dos motivos para a importância desse estudo é a constante aplicabilidade das propriedades dos sólidos geométricos a situações do mundo físico tratadas em diversas áreas do conhecimento, com a Arquitetura, a Engenharia e as Artes.





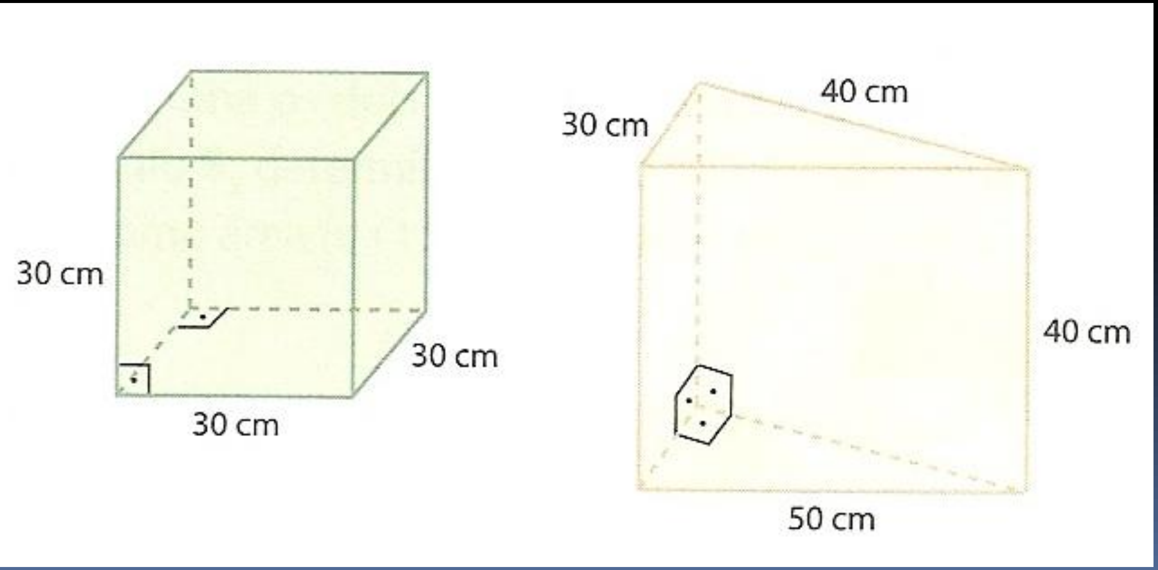

Situação-problema

Duas caixas ocas de madeira serão construídas com as formas e medidas nas figuras abaixo.

Deseja-se saber:

Em qual delas será usada maior quantidade de madeira?

Qual delas terá espaço interno maior?



Noções primitivas

A construção da Geometria se baseia em três noções iniciais, das quais temos um conhecimento intuitivo, decorrente da observação do mundo concreto. Essas noções são as de ponto, reta e plano.

Representamos da seguinte forma:

ponto A
(letra maiúscula)

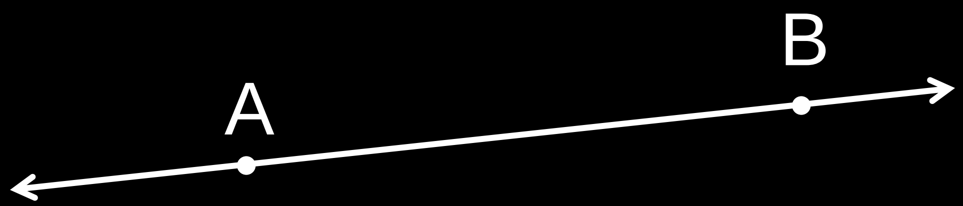
reta r
(letra minúsculas)

plano α
(letra grega)

Observação: As noções primitivas ou iniciais não são definidas.

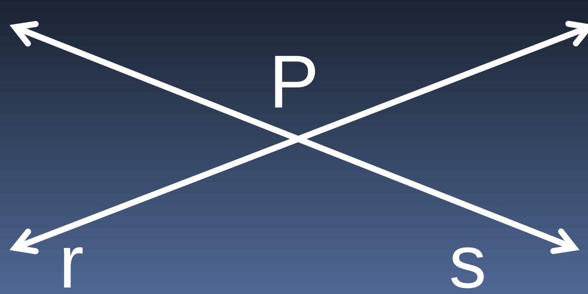
Determinação de uma reta

Dados dois pontos distintos do espaço, existe apenas uma reta que os contém.



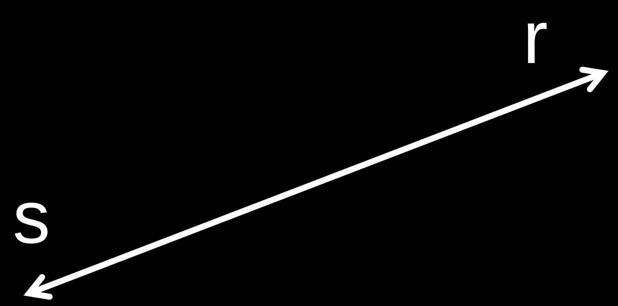
Posições relativas de duas retas

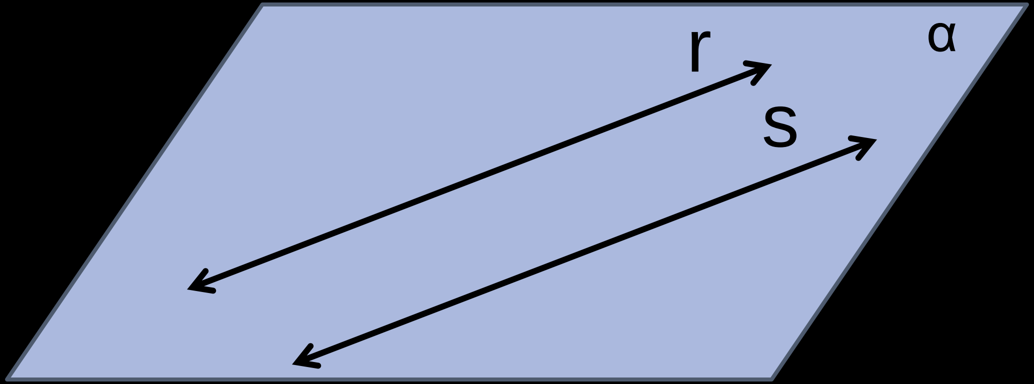
Retas concorrentes: duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto comum.



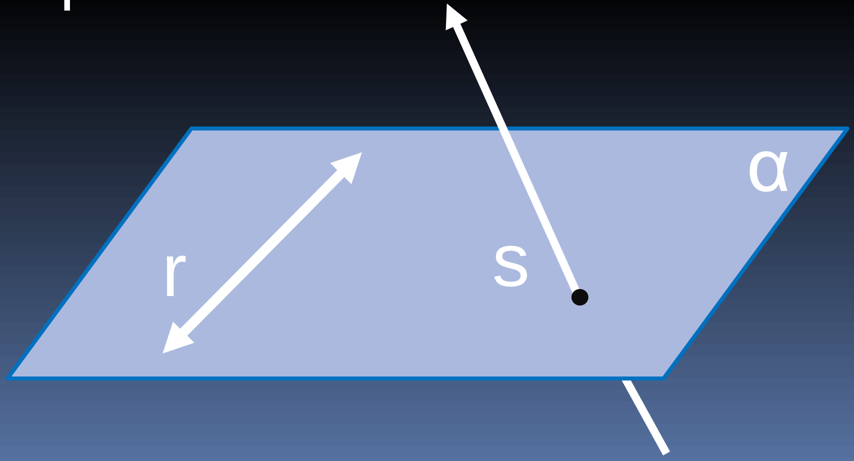
$r \cap s = \{P\}$

Retas paralelas: duas retas são paralelas quando são coincidentes ou são coplanares (estão contidas em um mesmo plano) e não têm ponto comum.



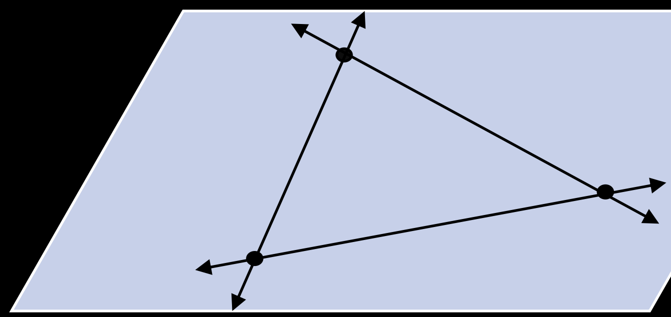


Retas reversas: Duas retas são reversas quando não existe plano que contém ambas.



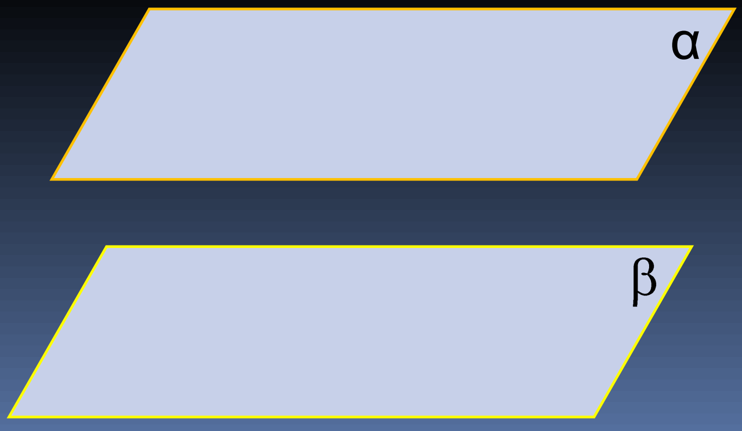
Determinação de um plano

Dado três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

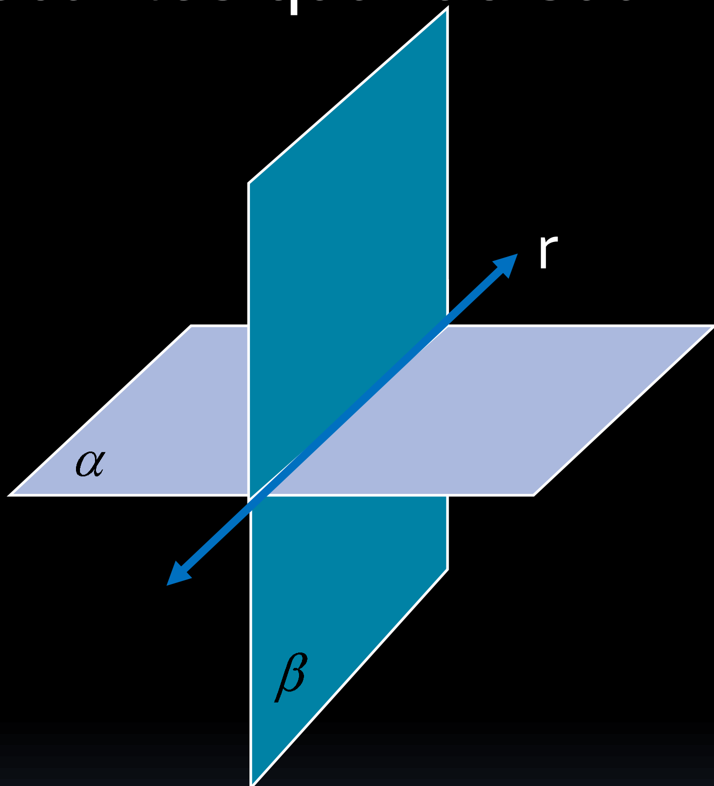


Posições relativas de dois planos

Planos paralelos: dois planos são paralelos quanto não possuem ponto em comum ou são coincidentes.



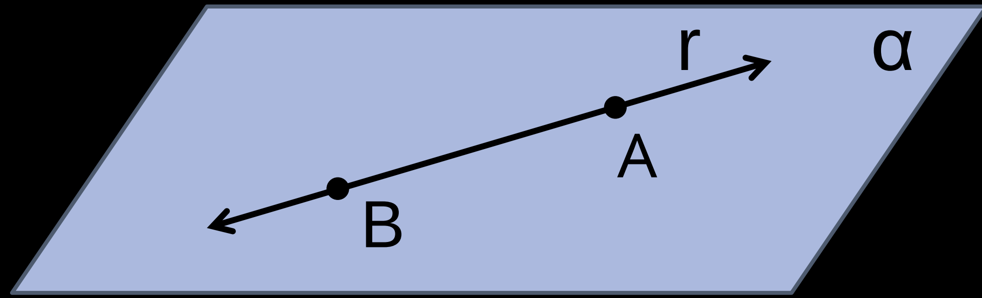
Planos secantes (concorrentes): dois planos são secantes quando sua intersecção é uma reta.



$$\alpha \cap \beta = r$$

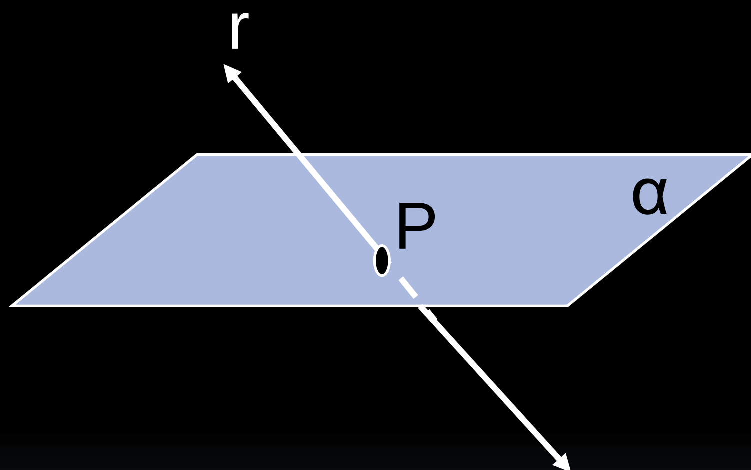
Posição Relativa entre Reta e Plano

Reta contida no plano: uma reta está contida no plano quando, pelo menos, dois de seus pontos pertencem ao plano.



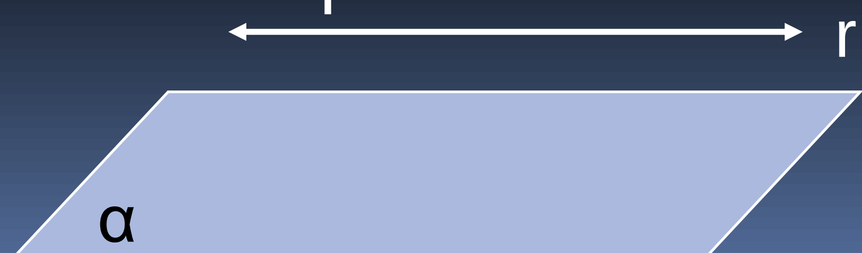
$$r \subset \alpha$$

Reta e plano concorrentes: quando possuem um único ponto em comum.



$$r \cap \alpha = \{P\}$$

Reta e plano paralelos: quando a reta e o plano não têm nenhum ponto comum.

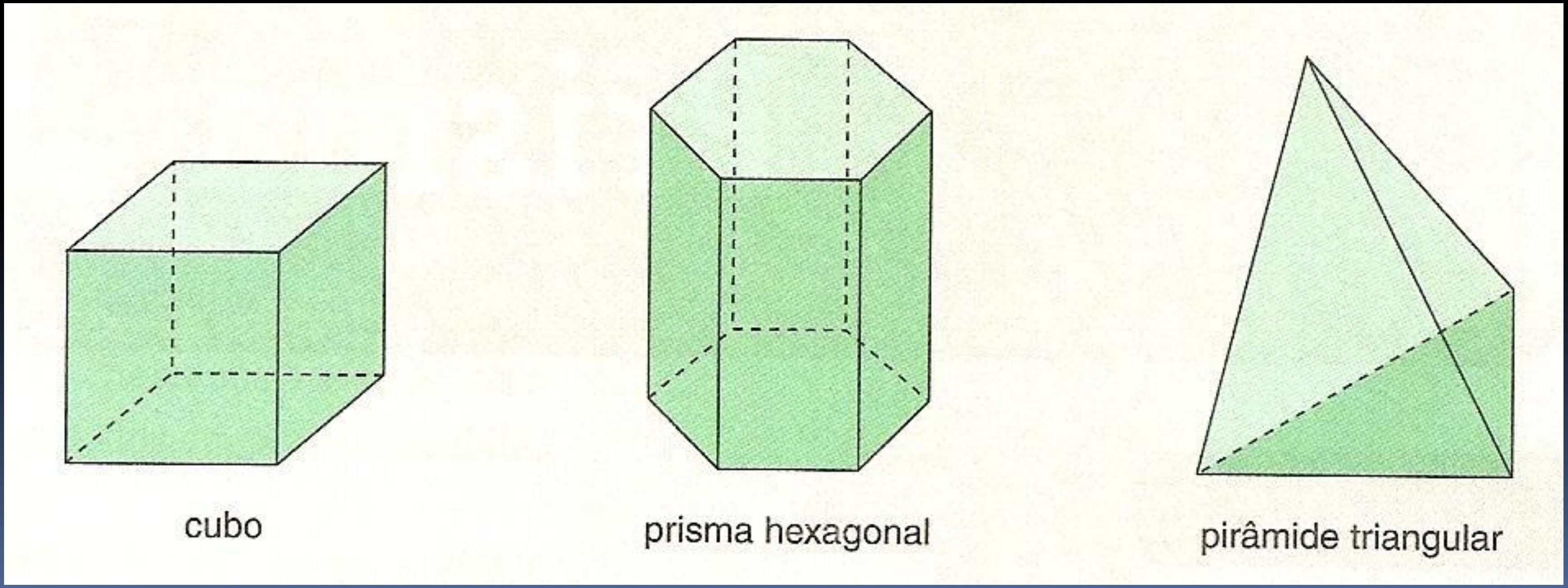


$$r \cap \alpha = \varnothing$$

Poliedros

São sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc). A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa “vários”, e edros, “faces”.

Exemplos:

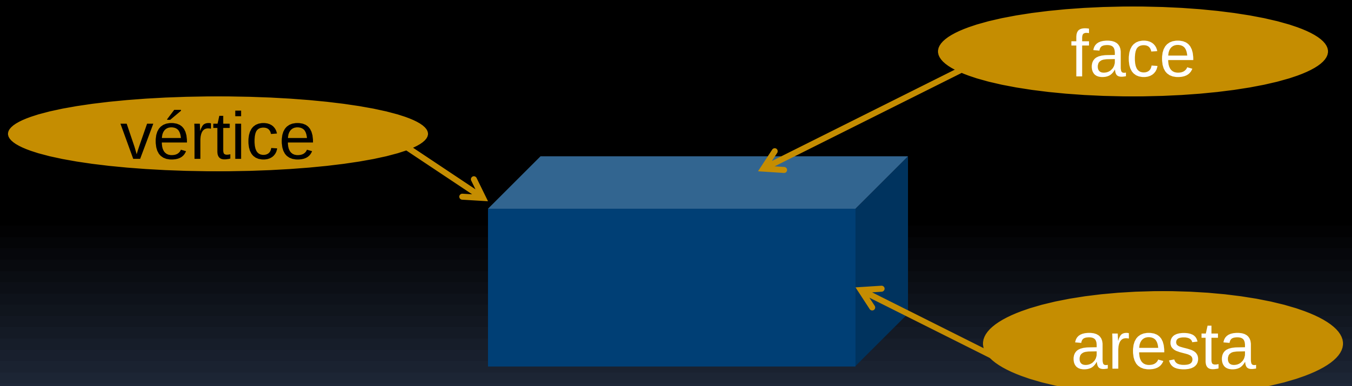


Elementos de um poliedro

Face de um poliedro é cada um dos polígonos que o delimitam.

Aresta de um poliedro é cada um dos lados das faces.

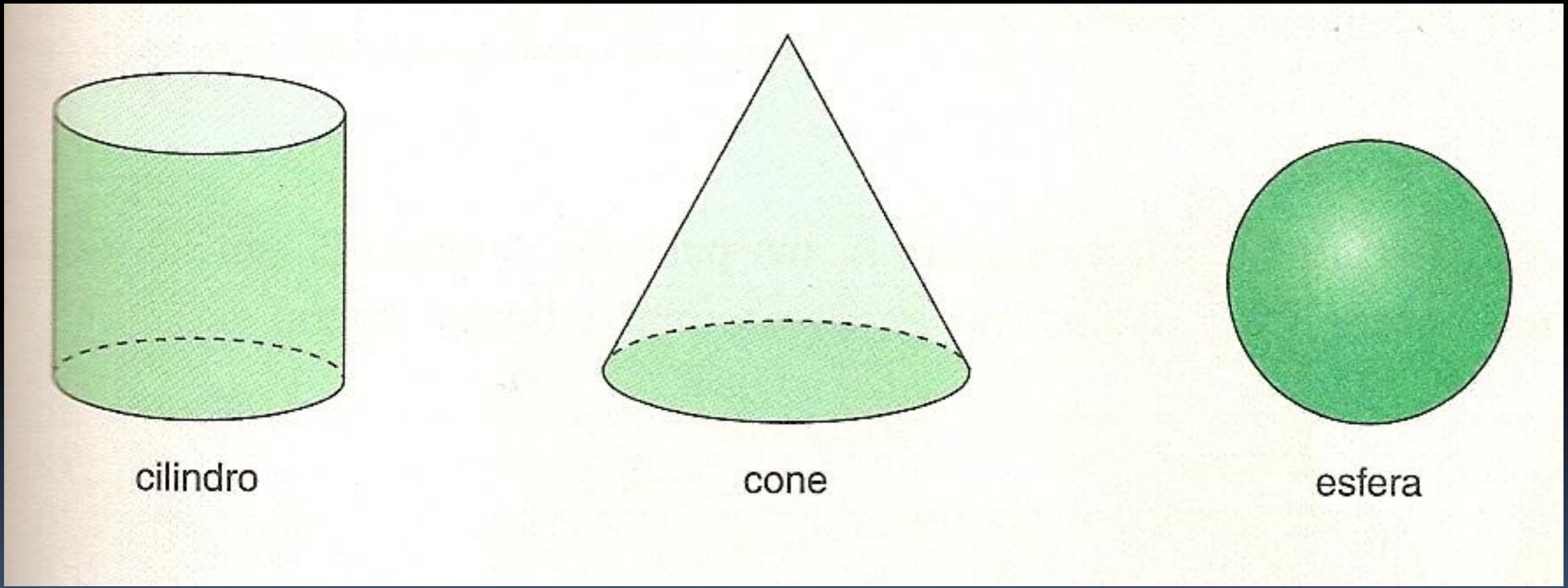
Vértice de um poliedro é cada um dos vértices das faces.



Corpos redondos

São sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana).

Exemplos:



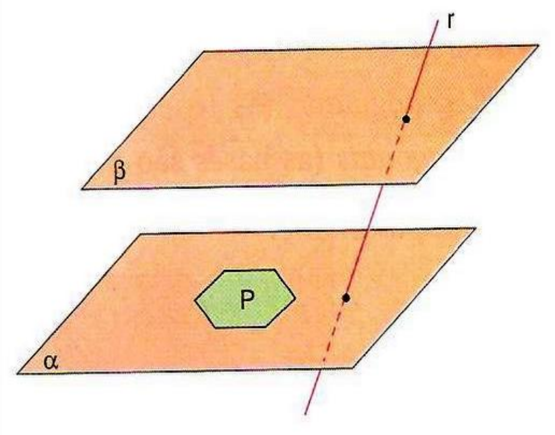
Prisma

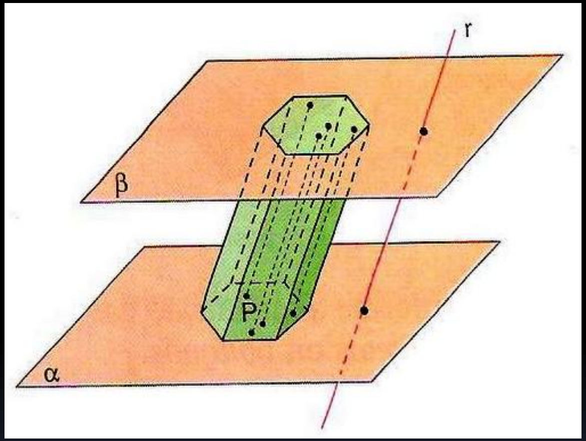
Na figura abaixo, temos:

• Dois planos paralelos α e β.

• Um polígono *P* contido em α.

• Uma reta *r* que. intercepta α e β, mas não intercepta *P.*

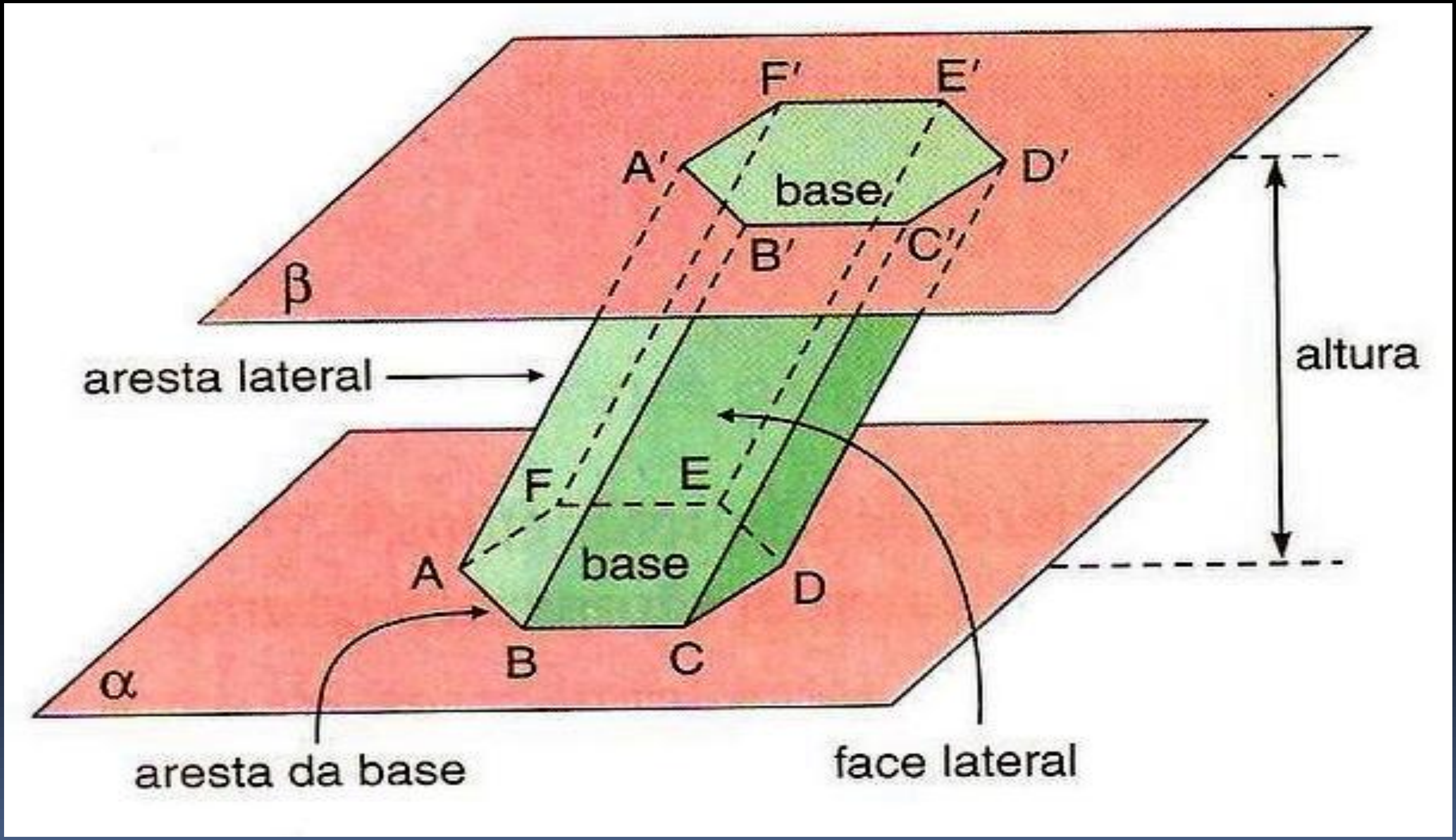




A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelas à reta *r*, com uma extremidade num ponto do polígono *P* e a outra no plano *β*, denomina-se *prisma*.

Elementos de um prisma

Num prisma, convém destacar os seguintes elementos:



Classificação de um prisma

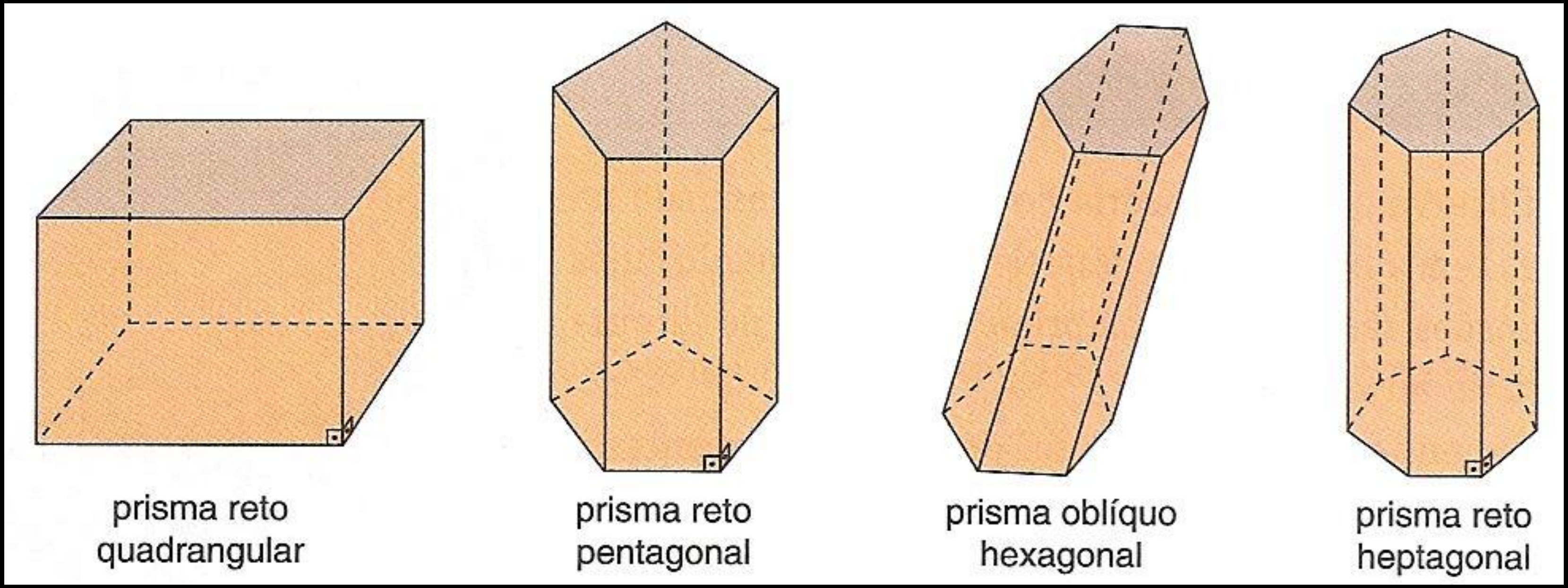
Quanto ao número de lados de cada polígono da base, os prismas são classificados em: triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme o polígono da base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Quanto à inclinação das arestas laterais em relação ao planos das bases, os prismas são classificados em:

Prisma oblíquo: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases;

Prisma reto: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Exemplos:

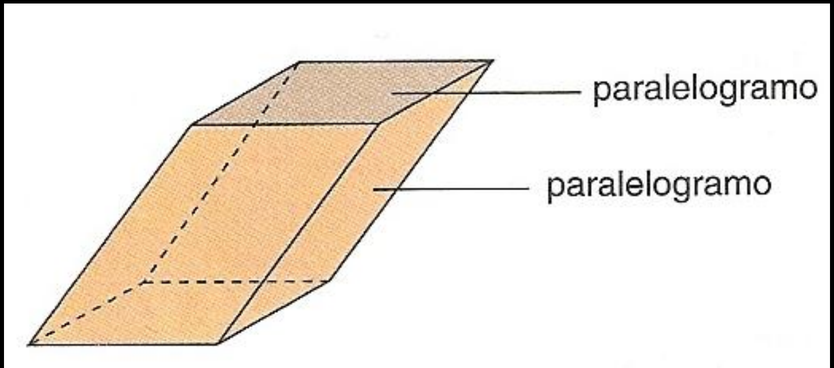


Observação: Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado de prisma regular.

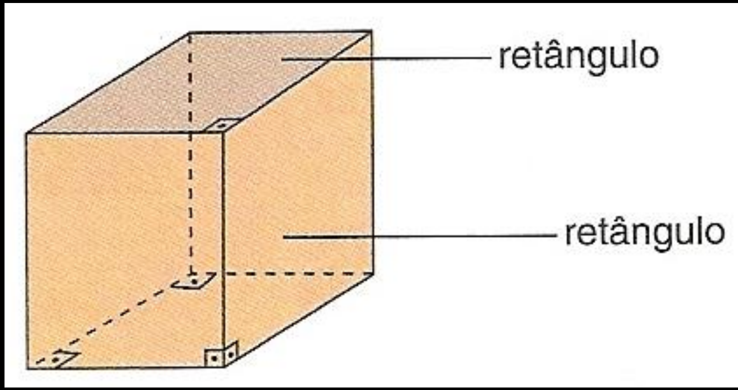
Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado paralelepípedo.

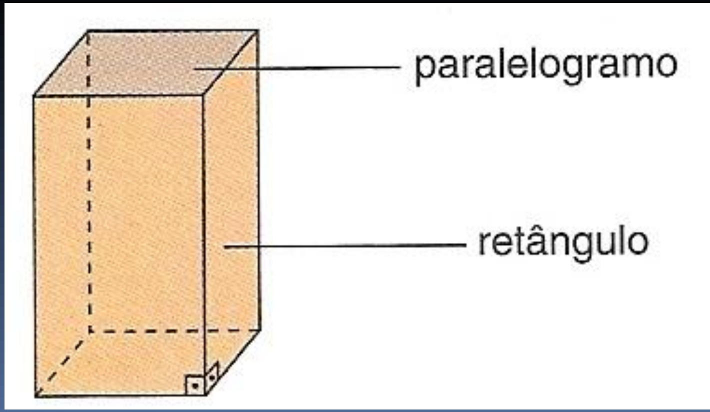
- oblíquo:



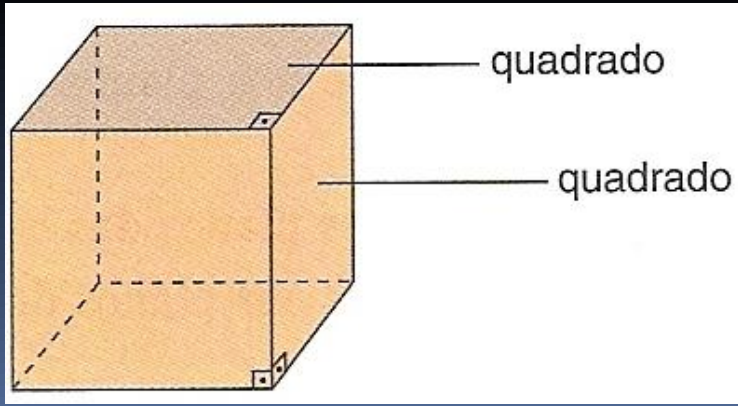
- retângulo:



- reto:

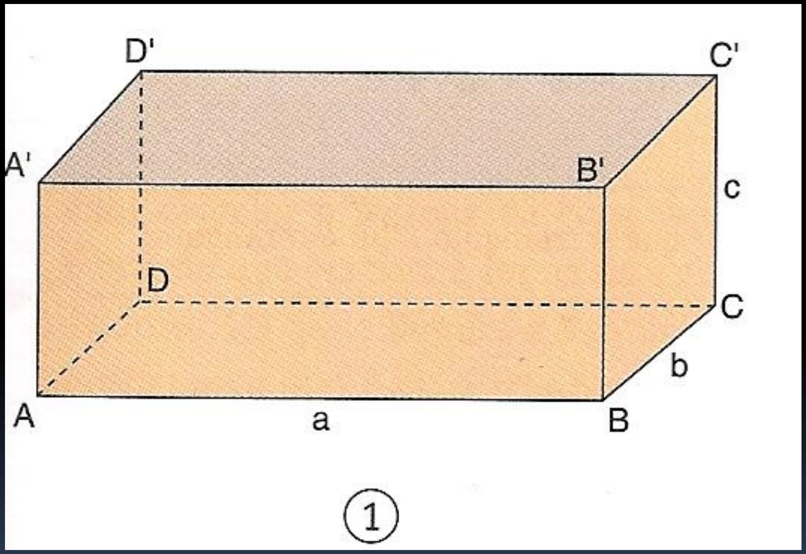


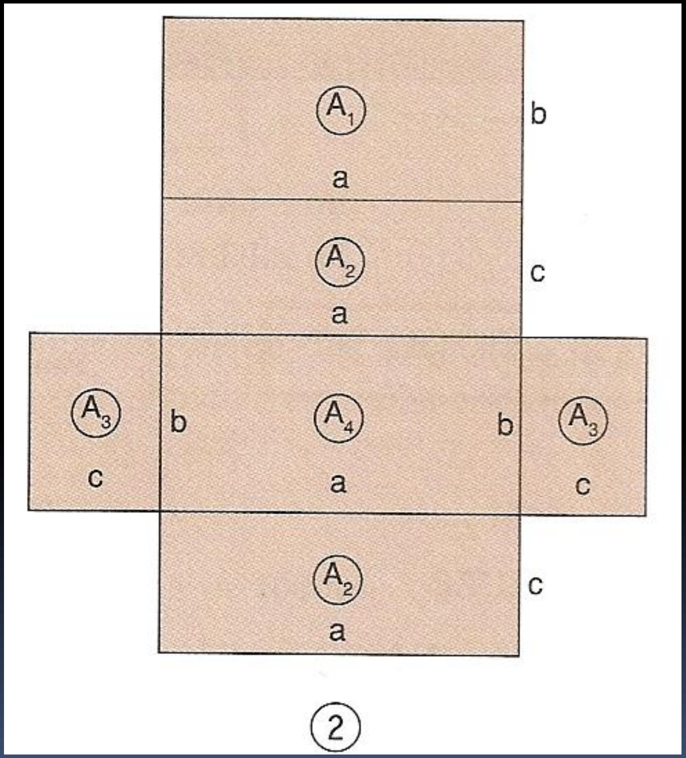
- cubo:



Cálculo da área total

A figura 1 representa um paralelepípedo retângulo, em que *a* e *b* são as medidas dos lados do retângulo da base e *c*, a medida da altura. A figura 2 representa a planificação desse paralelepípedo.

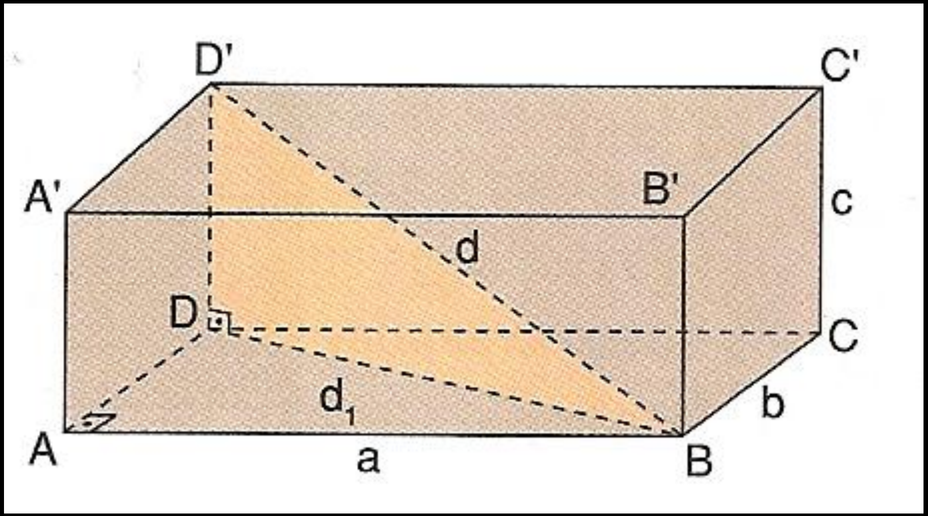




Pela planificação, temos: $A_t = 2ab + 2ac + 2bc$

Cálculo da medida da diagonal

No paralelepípedo da figura, sejam *d* a medida da diagonal do paralelepípedo e d_1 a medida da diagonal da base.



A diagonal do paralelepípedo é dada por:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Acompanhe a dedução no quadro:

Cálculo do volume

O volume do paralelepípedo é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Exemplos:

Em um aquário, um tanque para peixes tem a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada, e a água em seu interior ocupa 3/5 da sua capacidade. Considerando que esse tanque tem 3 m de altura e a aresta da base mede 4,5 m, determine quantos litros de água são necessários para que ele fique totalmente cheio.

Acompanhe a solução no quadro:

Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volume iguais (sólidos equivalentes).

Área da base (A_b): $A_b = \frac{b \cdot h}{2}$

Área lateral (A_l): a área lateral de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_t): $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

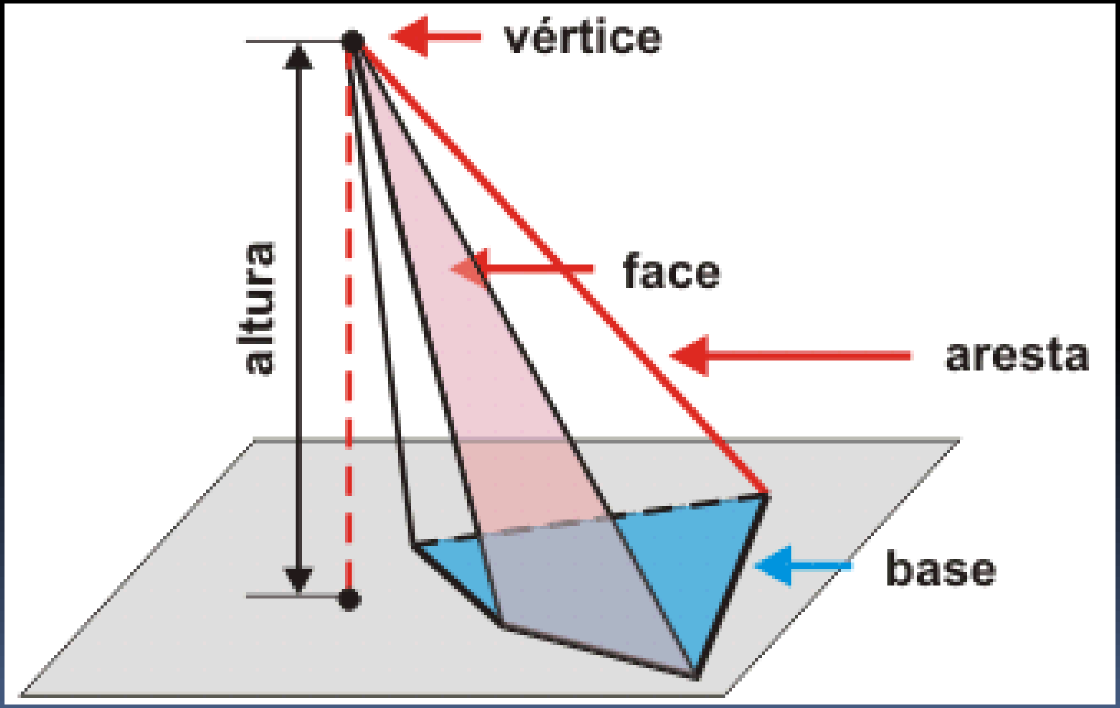
O volume (V) é dado por: $V = A_b \cdot h$

Pirâmide

Para os egípcios, as pirâmides representavam os raios do sol brilhando em direção à Terra. Todas elas foram construídas na margem oeste do rio Nilo, na direção do sol poente.

Elementos de uma Pirâmide

Para os egípcios, as pirâmides representavam os raios do sol brilhando em direção à Terra. Todas elas foram construídas na margem oeste do rio Nilo, na direção do sol poente.



Área e volume de uma Pirâmide

Do mesmo modo que foi visto nos prismas, nas pirâmides também temos:

Área da base (A_b): pode ser uma área de um triângulo, quadrilátero, pentágono etc.

Área lateral (A_l): a área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_t): $A_t = A_l + A_b$

O volume (V) é dado por: $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$

Exemplo:

A pirâmide tem por base um quadrado de lado 8 cm. A altura da pirâmide é 20 cm. Calcule a área total e o volume da pirâmide?

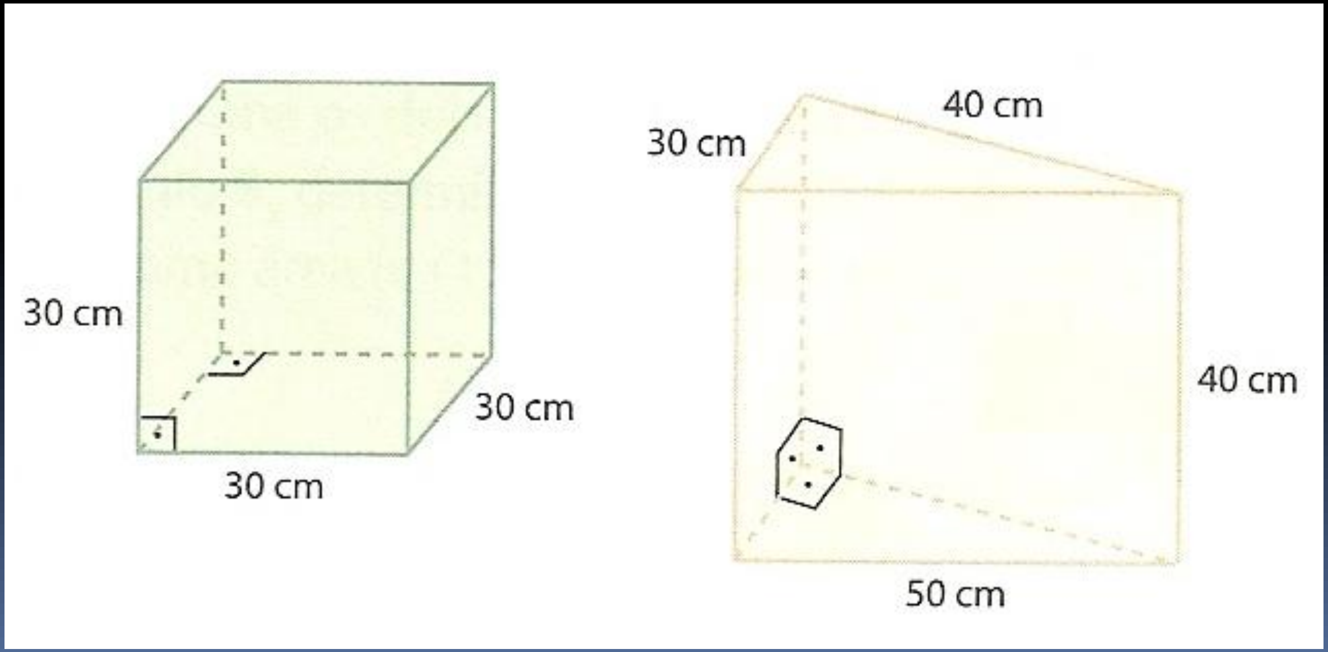
Resoluções de problemas

1) Duas caixas ocas de madeira serão construídas com as formas e medidas nas figuras abaixo.

Deseja-se saber:

Em qual delas será usada maior quantidade de madeira?

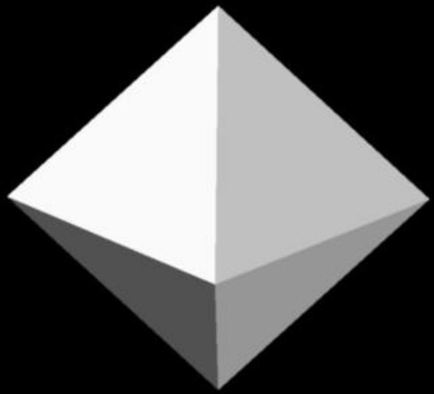
Qual delas terá espaço interno maior?



2) Uma barra de ouro é fundida na forma de um prisma cuja base é um trapézio (figura ao lado). As bases desse trapézio medem 8 cm e 12 cm e a altura da barra é 5 cm. O comprimento da barra é 30 cm. Qual é o seu volume?

3) A pirâmide de Quéops é conhecida como a Grande Pirâmide do Egito. Sua base tem aproximadamente 230 m de aresta e sua altura é de 137 m. Qual é o volume desse pirâmide?

4) Uma pedra preciosa tem a forma da figura ao lado. Sabendo que a pedra tem 6 mm em todas as arestas, calcule o volume da pedra.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.