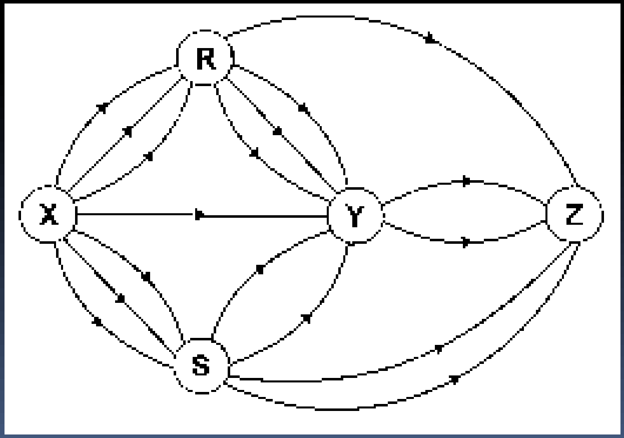
ANÁLISE COMBINATÓRIA E SUAS APLICAÇÕES.

PROF. EDCARLOS PEREIRA



INTRODUÇÃO

Análise combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto. Seu estudo encontra aplicação nas mais diversas situações: por exemplo, de quantas maneiras uma garota pode se vestir utilizando 6 blusas, ou quantos jogos teremos, ao se montar tabelas de campeonatos.

Pos	Equipe	PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1	Cruzeiro (Macaíba)	11	5	3	2	0	11	5	6
3	Potyguar	8	4	2	2	0	8	1	7
2	Mossoró	7	5	2	1	2	6	4	2
4	Apodi	7	4	2	1	1	5	3	2
5	Upanema	1	4	0	1	3	5	12	-7
6	Parnamirim	1	4	0	1	3	6	16	-10

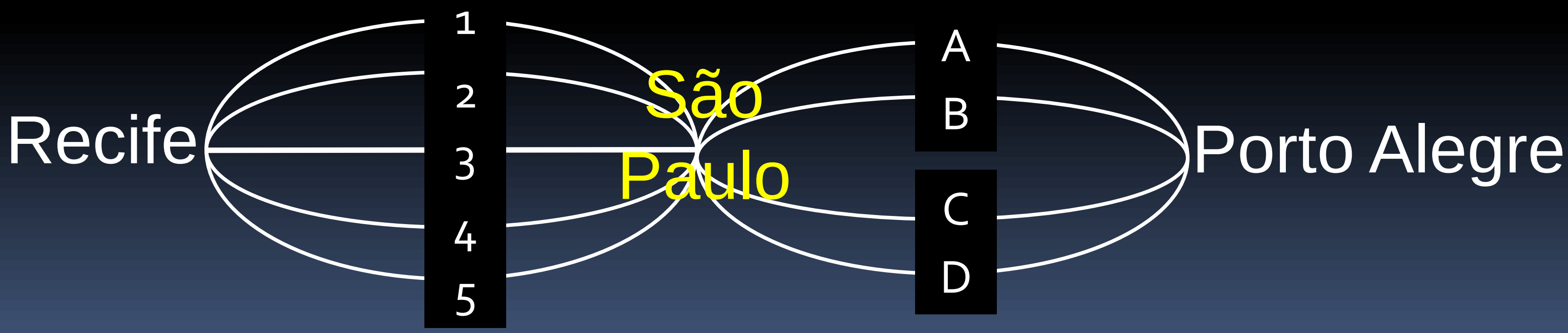
Situação-problema

Um programa de TV sorteia 2 casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendam à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

Princípio multiplicativo

Acompanhe a resolução do problema abaixo:

Uma pessoa que viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



Total de possibilidades: 5x4 = 20

Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, *A* e *B*. Se *A* pode ocorrer de *m* maneiras e se, para cada uma, *B* pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras de ocorrência do acontecimento é *mxn.*

Esse é o *princípio fundamental da contagem (PFC).*

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Veja a seguir alguns exemplos:

1) Num restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos: 2x3x3 = 18 possibilidades.

2) Com os algarismo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

7	8	8

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 7x8x8 = 448 números.

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

7	7	6

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 7x7x6 = 294 números de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

3) De quantos modos podemos organizar 4 livros numa estante, 2 de matemática e 2 de física, sabendo que não podemos ter os livros da mesma disciplina juntos?

Neste problema, temos que separar.

Começando por Matemática:

2	2	1	1

Começando por Física:

2	2	1	1

Pelo PFC, temos:

$$\left.\begin{matrix} 2x2x1x1=4 \\ e \quad + \\ 2x2x1x1=4 \end{matrix}\right\} = 8$$

Fatorial de um número natural

O fatorial de um número natural n é representado por n! (lemos: “n fatorial”) e definido por:

1) n! = n x (n-1) x (n-2) x ... x 2 x 1, para n >= 1
2) 0! = 1

Exemplos:

1) Calcular o fatorial de: 3, 4, 6 e 10.

- 3! = 3x2x1 = 6
- 4! = 4x3x2x1 = 24
- 6! = 6x5x4x3x2x1 = 720
- $10! = 10 \times \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{9!} = 10 \times 9!$

2) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

$$a)\quad \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 8\cdot 7 = 56$$

$$b)\quad \frac{48!+49!}{50!} = \frac{48!+49\cdot 48!}{50!} = \frac{\cancel{48!}(1+49)}{50\cdot 49\cdot \cancel{48!}} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{50}\cdot 49} = \frac{1}{49}$$

$$c)\quad \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

Permutação simples

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

Vejamos agora quantos agrupamentos é possível formar quando temos n elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observe os exemplos:

1) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares?

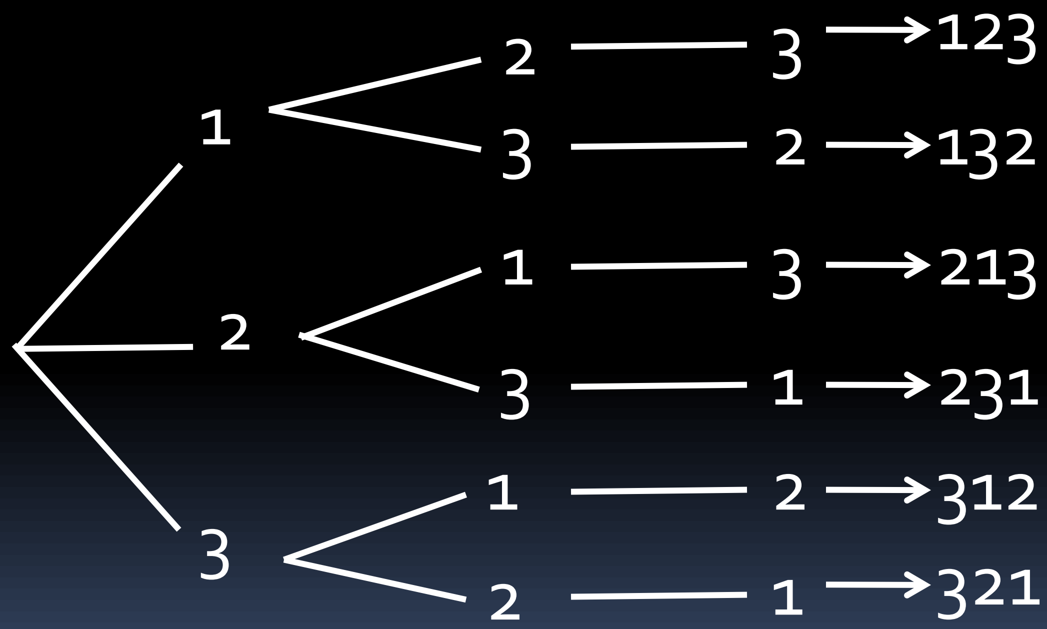
_____ _____ _____ _____ _____

5 4 3 2 1

Há 5 possibilidades para a primeiro lugar, 4 possibilidades para segundo, 3 possibilidades para terceiro, 2 possibilidades para a quarto e 1 possibilidade para a quinto lugar. Pelo PFC, temos: 5x4x3x2x1=120 maneiras.

2) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismo 1, 2 e 3?

Podemos resolver por tentativa. Assim temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo PFC, temos: 3x2x1= 6 possibilidades.

3) Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?

______ ______ ______ ______

4 3 2 1

Considerando as quatro letras: *a*, *n*, *e* e *l*, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo PFC temos: 4x3x2x1 = 24 possibilidades, ou seja, são 24 anagramas.

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de *permutação simples*. Indicamos por P_n o número de permutações simples de **n** elementos:

P_n = nx(n-1)x(n-2)x...x3x2x1, para n >= 1. (Fatorial de n)

Resoluções de problemas

1) Um programa de TV sorteia 2 casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendam à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

2) Uma aranha encontra-se no ponto A de sua teia e quer chegar ao ponto B sem passar mais de uma vez por um mesmo segmento da teia. Além disso, ao percorrer um segmento radial (em traço mais fino), ela deve seguir o sentido indicado pela flecha. Quantos são os caminhos possíveis?

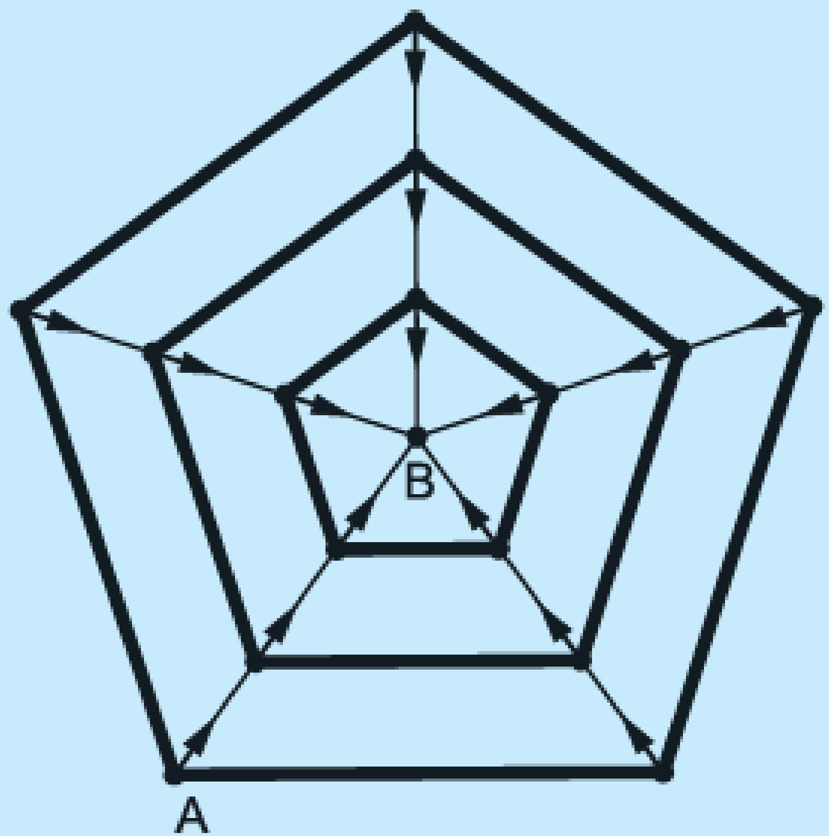
A) $2^3 \times 5$

B) $11^3 \times 5^2$

C) 5^3

D) 11^3

E) 2×5^3



3) (Enem/2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

4) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A) 24.
B) 31.
C) 32.
D) 88.
E) 89.

5) Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas?

6) Um estádio possui 4 portões. De quantas maneiras diferentes um torcedor pode entrar e sair desse estádio utilizando, para sair, um portão diferente do que entrou?

Permutação com elementos repetidos

Se entre os ***n*** elementos de um conjunto existem ***a*** elementos repetidos, ***b*** elementos repetidos, ***c*** elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!\ldots}$$

Observe os exemplos:

1) Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Note que, o T repete 2 vezes, o A 3 vezes e temos o total de 6 letras. Logo,

$$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2!\cancel{3!}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

2) Quantos são os anagramas da palavra DEZESSETE?

Neste exemplo, o S repete 2 vezes, o E repete 4 vezes e temos o total de 9 letras. Logo,

$$P_9^{2,4} = \frac{9!}{2!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2!\cancel{4!}} = 7560$$

3) Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida um sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

Veja abaixa uma possível resposta:

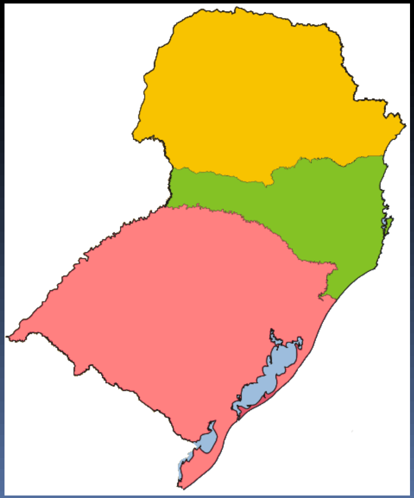
1 1 2 6 1 1 5. Note que, o 1 repete 4 vezes e o total são 7 números.

$$P_7^4 = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

Arranjos simples

Vimos que permutação simples de *n* elementos é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos. Agora tendo *n* elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de *p* elementos, p <= n. Observe os exemplos:

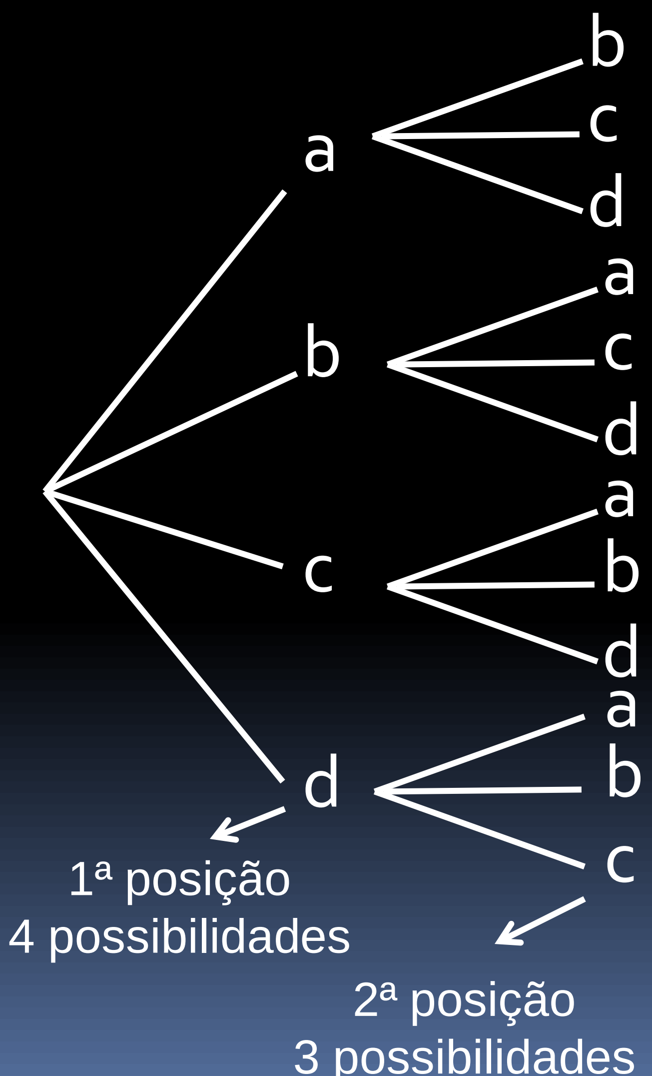
1) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?



São 3 estados: Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Para pintar o Rio Grande do Sul há 5 possibilidades, para Paraná há 4 possibilidades e para Santa Catarina há 3 possibilidades.

Pelo PFC, temos: 5x4x3 = 60 possibilidades.

2) Considerando as letras *a*, *b*, *c* e *d*. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?



Na primeira posição temos 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis). Na segunda posição, 3 possibilidades (pois temos 3 elementos disponíveis).

Pelo PFC, temos: 4x3 = 12 possibilidades

Os 12 agrupamentos são:

ab	ba	ca	da	ac	bc
cb	bd	ad	db	cd	dc

Esses agrupamentos são chamados de arranjos simples. Arranjamos 4 elementos tomados 2 a 2, e o número desses arranjos foi 12. Escrevemos então: $A_{4,2} = 4x3 = 12$ (arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2 é igual a 12).

3) Usando os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar?

5	4	3

Há 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 4 para o segundo e 3 para o terceiro. No total podemos então formar 5x4x3 = 60 números

Dizemos neste exemplo que fizemos arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3, e o número desses arranjos é 60. Indicamos assim: $A_{5,3} = 5x4x3 = 60$.

Definição e fórmula dos arranjos simples

Arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* (p <= n) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com *p* dos *n* elementos dados. Indica-se por $A_{n,p}$ ou A^p_n o total desses agrupamentos, que calculamos por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

- Quantas maneiras 5 meninos podem se sentar num banco que tem apenas 3 lugares?

Queremos arranjar 5 elementos tomados 3 a 3. Então,

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \ \ maneiras.$$

Resoluções de problemas

1) Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo?

2) Em uma escola está sendo realizado um torneio de futebol de salão, no qual dez times estão participando. Quantos jogos podem ser realizados entre os times participantes em turno e returno?

OBMEP 2011

3) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

A) 12654
B) 12740
C) 13124
D) 13210
E) 13320

4) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3.
De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

a) 551 b) 552 c) 553 d) 554 e) 555

Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção o exemplo abaixo:

1) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representamos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana;
F: Felipe; e G: Gustavo.
Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos {A,E,R,F,G}.

A ordem em que os elementos aparecem nos subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane.

Então, os subconjuntos de 2 elementos são: {A,E},{A,R},{A,F},{A,G},{E,R}{E,F},{E,G},{R,F},{R,G}{F,G}.

Chamamos estes subconjuntos de combinação simples de 5 elementos tomados com 2 a 2. Escrevemos $C_{5,2}$.

Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2}$ =10.

Definição e fórmula das combinações simples

Dado um conjunto de n elementos, chama-se combinações simples dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,p}$ ou C^p_n o total desses subconjuntos, que calculamos por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Exemplo:

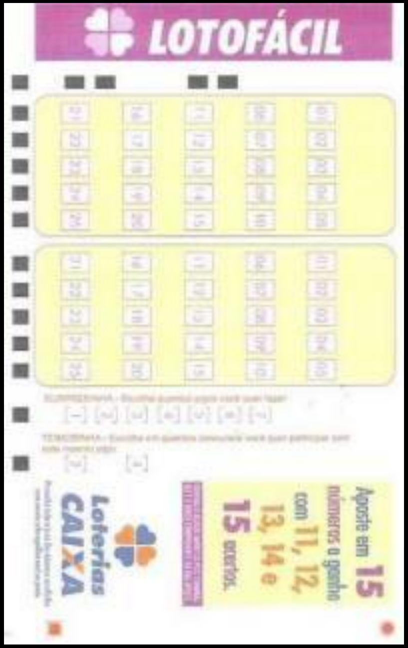
2) Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que 3 pontos não sejam colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.

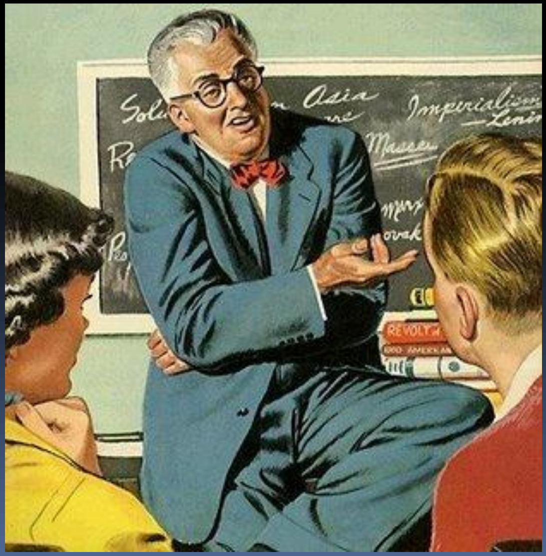
$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3! \cdot \cancel{3!}} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 20$$

Resoluções de problemas

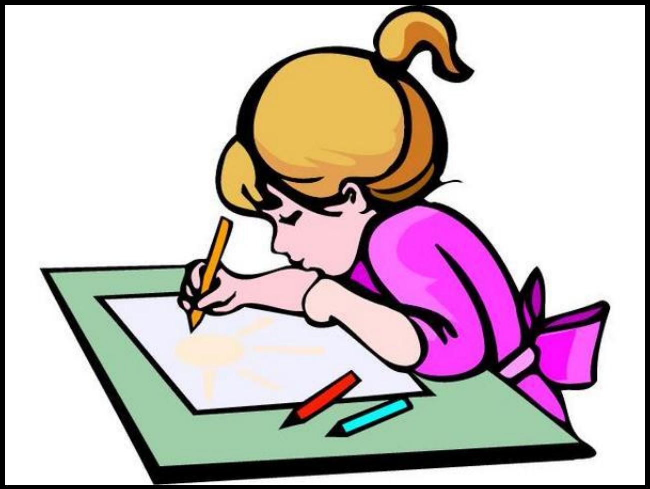
1) Para fazer uma aposta da Lotofácil, devemos marcar 15 números entre os 25 constantes no volante. De Quantas maneiras é possível preencher um cartão da Lotofácil?



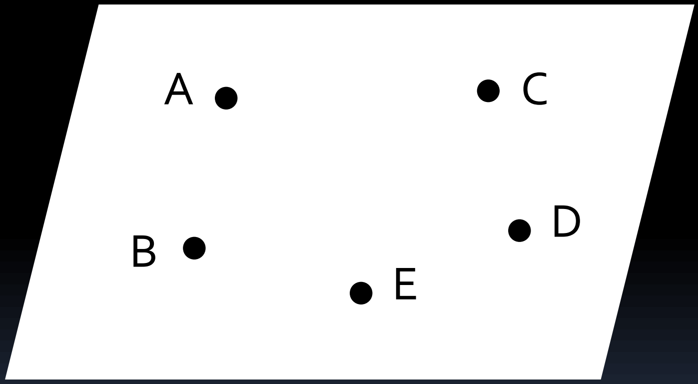
2) Para resolver um assunto entre 6 professores e 4 alunos, devemos formar comissões com 3 professores e 2 alunos. Quantas são as possibilidades?



3) Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 6. De quantas maneiras ele poderá escolher essas 6 questões?



4) Num plano existem 5 pontos, sendo que 3 deles não são colineares. Qual é o número possível de retas que passam por esses pontos?



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

- Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.