PROF. EDCARLOS PEREIRA

FUNÇÕES QUADRÁTICAS E SUAS APRICAÇÕES

INTRODUÇÃO

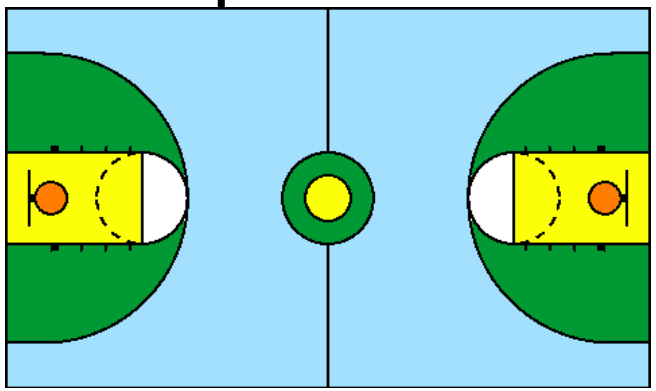
Todos sabemos que o Brasil é pentacampeão mundial de futebol. A próxima Copa em 2014 será realizada aqui no Brasil e podemos ser hexacampeão mundial de futebol.

Trajetória da bola

Já pararam para pensar quando um jogador chuta uma bola, ela sobe, atinge uma altura máxima, depois vai descendo até tocar o chão. Será possível descrever a trajetória da bola através de um modelo matemático?

Veja também

Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno e cercar com tela para que a área seja a maior possível.



Definição

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde **a**, **b** e **c** são números reais e $\mathbf{a \neq 0}$.

Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

$f(x) = x^2$, onde a = 1, b = 0 e c = 0
$f(x) = x^2 - 1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
$f(x) = 3x^2 - 4x$, onde a = 3, b = - 4 e c = 0
$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5

Gráfico da função quadrática

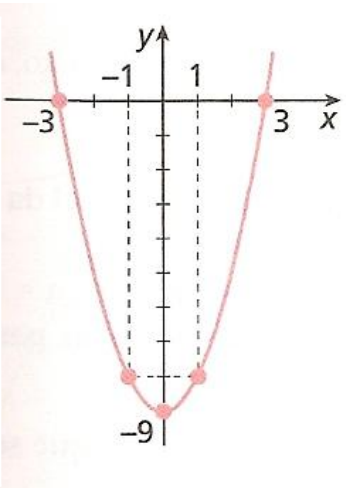
O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

As Parábolas podem ter abertura (concavidade) votada para cima ou para baixo.

Exemplos

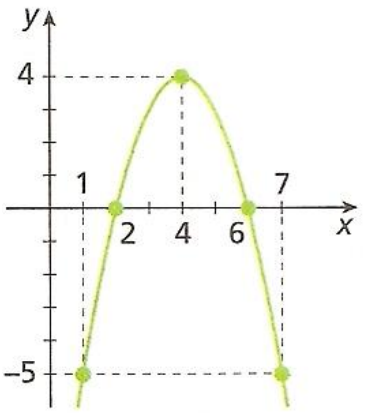
a) $y = x^2 - 9$ (a>0)

x	$y = x^2 - 9$
-3	0
-1	-8
0	-9
1	-8
3	0



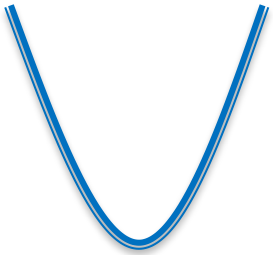
b) $-x^2 + 8x - 12$ (a<0)

x	$y = -x^2 + 8x - 12$
1	-5
2	0
4	4
6	0
7	-5

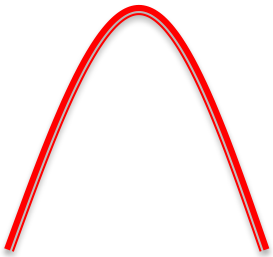


Observações sobre coeficiente a

Se a > 0, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.



Se a < 0, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.



Raízes o zeros da função quadrática (Fórmula de Bháskara)

Chamam-se raízes ou zeros da função quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que f(x)=0.

Vamos deduzir a fórmula de Bháskara. Temos:

$$f(x) = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Continuando...

$$\rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Daí, resulta a chamada fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo: $\Delta = b^2 - 4ac$, temos $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Observação: chamamos Δ (delta) de discriminante.

Exemplos:

a) Vamos obter os zeros reais da função de IR em IR, definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Temos: a =1, b = -5 e c = 6.

Então,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$, mas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} := \frac{5 \pm 1}{2}$$

x' = 3

x'' = 2

b) Determinar as raízes reais da função dada pela lei $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

Temos: a =4, b = -4 e c = 1.

Então,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.4.1 = 16 - 16 = 0$, mas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2.4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Calcular os zeros reais da função dada pela lei $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Temos: a = 2, b = 3 e c = 4.

Então, $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4.2.4 = 9 - 32 = -23$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} \notin \text{IR}$$

Observações sobre discriminante Δ

A quantidade de raízes de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado de discriminante.

- quando $\Delta > 0$, há duas raízes reais distintas.
- quando $\Delta = 0$, há duas raízes reais iguais.
- quando $\Delta < 0$, não há raiz real.

Relação entre coeficientes e raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$

Existindo zeros reais tais que:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Observe que $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$, isto é, o ponto médio entre as raízes.

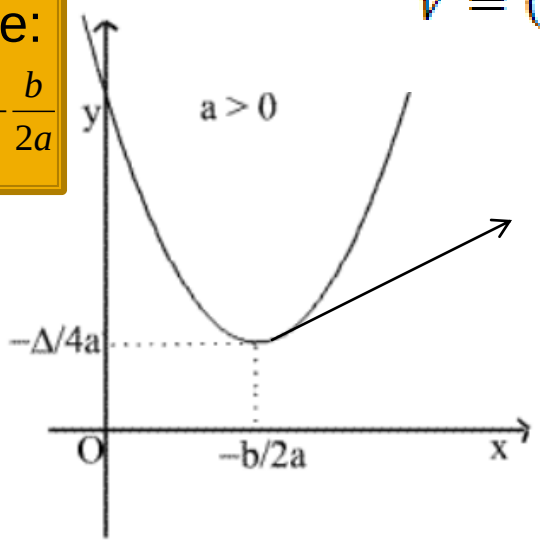
Máximo e Mínimo da Função Quadrática

Dada a parábola de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu valor máximo ou mínimo será conhecido pelo seu vértice que é encontrado por:

Note que:

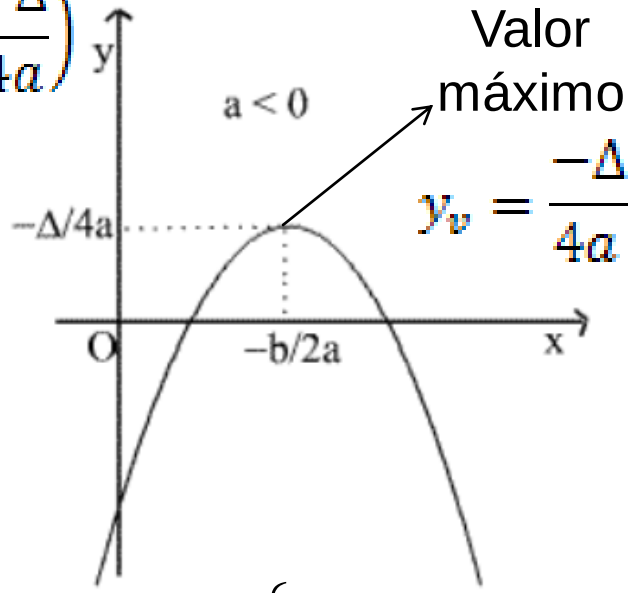
$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$



Valor mínimo

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



Valor máximo

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

OBSERVAÇÃO: $\text{Im}(f) = \left\{ y \in \Re \,/\, y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$ $\text{Im}(f) = \left\{ y \in \Re \,/\, y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$

GeoGebra (software livre)

Agora iremos construir parábolas utilizando o software Geogebra, mostrando a relação que há entre os coeficientes a, b e c da função $f(x) = ax^2+bx+c$.

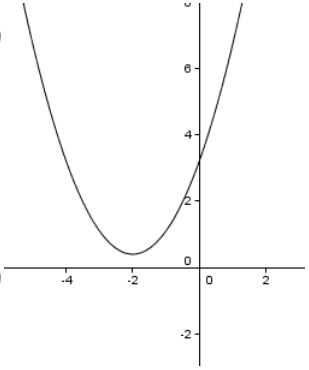
Para fazer download. Acesse:

http://geogebra.softonic.com.br/download

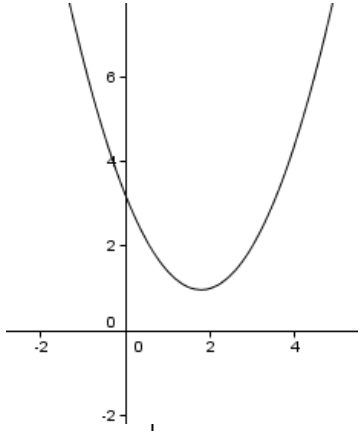
Abrir arquivo do GeoGebra

Conclusões extraídas do GeoGebra

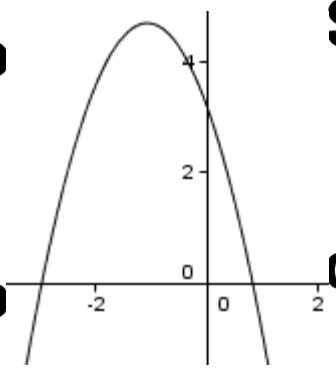
Se a > 0 e b > 0, o vértice da parábola ficará do lado esquerdo do eixo-y.



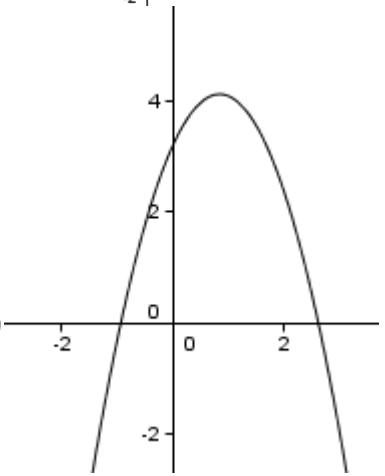
Se a > 0 e b < 0, o vértice da parábola ficará do lado direito do eixo-y.



Se a < 0 e b < 0, o vértice da parábola ficará do lado esquerdo do eixo-y.



Se a < 0 e b > 0, o vértice da parábola ficará do lado direito do eixo-y.



Resoluções de problemas que ocorre em nosso cotidiano

1) Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno e cercar com tela para que a área seja a maior possível.

2) Uma bola atingiu uma altura de 2,5m e percorreu horizontalmente uma distância 10m. Encontre uma lei de formação que represente a trajetória da bola?

3) Sabe-se que o lucro total de um empresa é dado pela fórmula $L = R – C$, em que L é o lucro total, R é a receita total e C é o custo total da produção. Numa empresa que produziu x unidades, verificou-se que $R(x) = 6000x – x^2$ e $C(x) = x^2 – 2000x$. Nessas condições, qual deve ser a produção x para o lucro da empresa seja máximo?

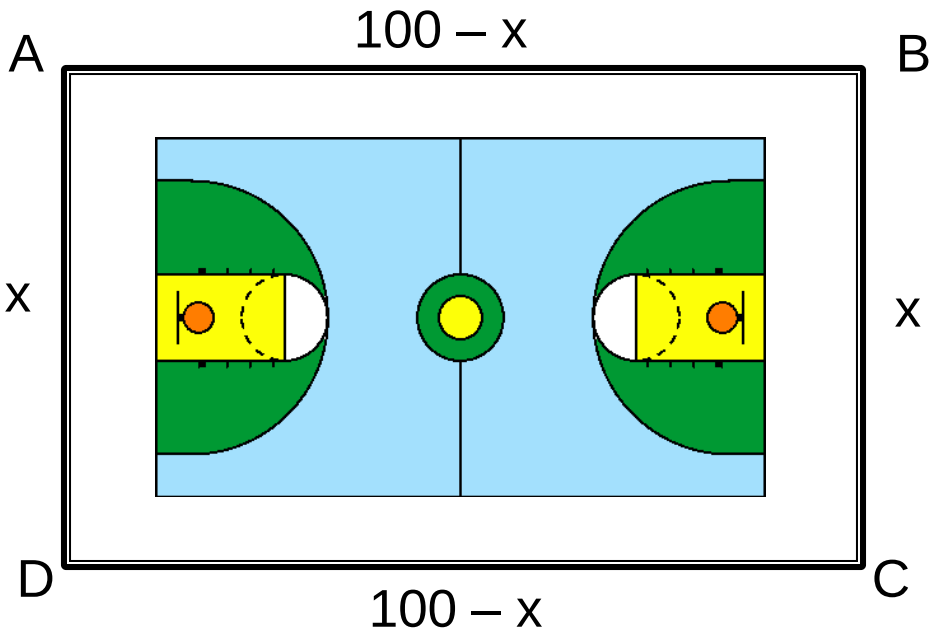
4) Um móvel percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento uniformemente variado cuja lei da posição s (em metro) em função do tempo t (em segundos) é $s(t) = -3 + 4t - t^2$. Depois de quantos tempo o móvel mudará de sentido? E em que instantes o móvel passar pela posição 0 (zero) da trajetória?

Resoluções de problemas que ocorre em nosso cotidiano

1) Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno e cercar com tela para que a área seja a maior possível.

Resolução:

Podemos ilustrar o problema com o retângulo ABCD, com dimensões x por 100 – x, pois o perímetro é de 200m.



A área do terreno a cercar é dada em função de x, ou seja: $f(x) = (100 - x)x = 100x - x^2$ → lei da função

A área máxima procurada é o valor máximo da função $f(x) = - x^2 + 100x$

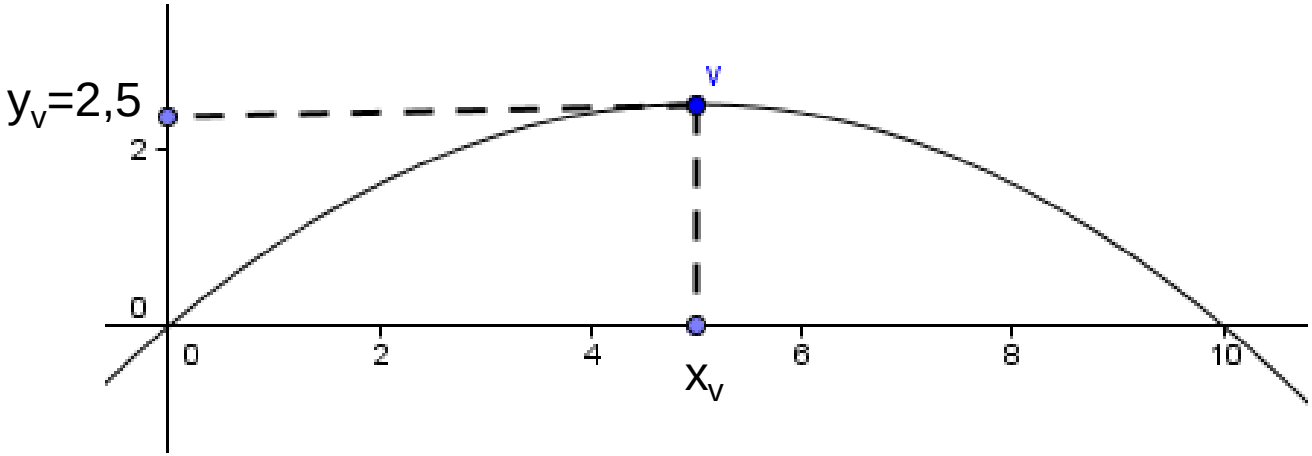
A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja, quando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = \frac{-100}{-2} = 50\ (largura)$$

Daí, concluímos que a área máxima a ser cercada é uma região quadrada cujo lado mede 50 metros.

2) Uma bola atingiu uma altura de 2,5m e percorreu horizontalmente uma distância 10m. Encontre uma lei de formação que represente a trajetória da bola?

A figura abaixo ilustra o problema



Note que a lei da função tem forma:
$f(x) = ax^2 + bx$,
$x_1=0$ e $x_2 = 10$

Mas: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5$. E, $x_v = \frac{-b}{2a}$, então: $b = -10a$

Daí, temos: f(5) = 25a + 5b = 2,5 (I) . Substituindo $b = -10a$

em (I), temos: 25a -50a = 2,5 → -25a = 2,5 → a = -1/10

e b = 1. Portanto, a lei de formação é: f(x) = -1/10x + x

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.