INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

MATEMÁTICA
7ª Lista de Exercícios - Determinantes
Professor: Edcarlos Pereira

SOLUÇÕES

FÁCIL

01) (**SOLUÇÃO**) O determinante da matriz 2x2 é dado por: o produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária, assim temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.(-1) - 1.2 = -3 - 2 = -5$$

Portanto, a alternativa correta é: letra b.

02) (**SOLUÇÃO**) Calculando o determinante da matriz 2x2, temos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 6x - 6 = 12$$

Depois, basta resolver a equação do primeiro grau:

$$6x - 6 = 12$$

$$6x = 12 + 6$$

$$6x = 18$$

$$x = \frac{18}{6}$$

$$x = 3$$

Portanto, a alternativa correta é: letra e.

03) (**SOLUÇÃO**) Podemos resolver de duas formas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

1 - Utilizando a regra de Sarrus:

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$\left|\begin{matrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \mathbf{8y - 0 = 8y}$$

$$8y + 0 + 0 = 8y$$

Como o determinante é igual a 32, segue que:

$$8y = 32 \rightarrow \boldsymbol{y = 4}$$

2 – Utilizando a propriedade da matriz triangular:

Bastar multiplicar os elementos da diagonal principal, isto é: 8y.

Como o determinante é igual a 32, segue que:

$$8y = 32 \rightarrow \boldsymbol{y = 4}$$

Logo, a alternativa correta é: letra d.

04) (**SOLUÇÃO**) Utilizando a regra de Cramer, vem:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -22 - (-20) = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 11 = -3$$

Logo, $\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2 \rightarrow x = 2}$

e

$$\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{-1} = 3 \rightarrow y = 3}$$

MÉDIO

01) (**SOLUÇÃO**) Utilizando a regra de Sarrus, temos:

$$9 + c^2 + 3 = c^2 + 12$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & c \end{matrix} = 2c + 27 - c^2 - 12 = -c^2 + 2c + 15$$

$$27 + c + c = 2c + 27$$

Como a matriz é singular o determinante é igual a zero, assim temos:

$$-c^2 + 2c + 15 = 0$$

Resolvendo a equação do 2° grau, temos:

$$c = -3 \text{ ou } c = 5$$

Assim sendo, a alternativa correta é: letra d.

02) (**SOLUÇÃO**) Podemos resolver de dois modos:

1 – Multiplica-se primeira a matriz A por B.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, o $\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 50 = 14$

2 – Utilizando o Teorema de Binet.

$$\det(A \cdot B) = \det(A).\det(B)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

Assim, $\det(A \cdot B) = (-2) \cdot (-7) = 14$.

Portanto, a alternativa correta é: letra e.

03) (**SOLUÇÃO**) Para facilitar vamos utilizar a coluna dois, pois tem mais zeros. Então, o determinante é:

$det(A) = 0 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42}$, como $a_{12} = 0$, $a_{32} = 0\ e\ a_{42} = 0$, temos que:

$det(A) = (-1) \cdot A_{22}$, onde A_{22} é o cofator do elemento a_{22}.

Calculando o cofator A_{22}, que é dado por:

$A_{22} = (-1)^{2+2}.D_{22}$ ou $A_{22} = D_{22}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Agora utilizando a regra de Sarrus, temos:

$$0 + 0 + 75 = 75$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{matrix} = 10 - 75 = \mathbf{-65}$$

$$10 + 0 + 0 = 10$$

Assim, $det(A) = (-1) \cdot (-65) = \mathbf{65}$.

Desse modo, a alternativa correta é: letra a.

04) (**SOLUÇÃO**) Utilizando a fórmula: $A_T = \frac{1}{2} \cdot |D|$, onde $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

O determinante de D é igual a 6 (faço os cálculos).

Assim, $A_T = \frac{1}{2} \cdot |6| \rightarrow A_T = 3\,u^2$.

Portanto, a alternativa correta é: letra a.

DIFÍCIL

01) (**SOLUÇÃO**) De $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, vem:

$ad - bc = 0$ ou $ad = bc$.

E $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2ad + bc$

Como $ad = bc$, então

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 1 \\ c & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2bc + bc = 3bc$$

Logo, a alternativa correta é: letra d.

02) (**SOLUÇÃO**) Para facilitar vamos utilizar a primeira linha. Então, o determinante é:

$det(A) = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 5 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$, como $a_{12} = 0\ e\ a_{14} = 0$, temos que:

$det(A) = 1 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{13}$, onde A_{11} é o cofator do elemento a_{11} e A_{13} é o cofator do elemento a_{13}.

Calculando o cofator A_{11}, que é dado por:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11}$ ou $A_{11} = D_{11}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

O determinante de $D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (faço os cálculos).

Calculando o cofator A_{13}, que é dado por:

$A_{13} = (-1)^{1+3}.D_{13}$ ou $A_{13} = D_{13}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

O determinante de $D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$ (faço os cálculos).

Assim, $det(A) = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 15 = 75$.

Portanto, a alternativa correta é: letra e.

03) (**SOLUÇÃO**) Para facilitar vamos utilizar a primeira coluna. Então, o determinante é:

$det(M) = (-2)\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 3\cdot A_{31} + 1\cdot A_{41}$, como $a_{21} = 0$, temos que:

$$det(A) = (-2)\cdot A_{11} + 3\cdot A_{31} + 1\cdot A_{41}.$$

Calculando o cofator A_{11}, que é dado por:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11}$ ou $A_{11} = D_{11}$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

O determinante de $D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$ (faço os cálculos).

Calculando o cofator A_{31}, que é dado por:

$A_{31} = (-1)^{3+1}.D_{31}$ ou $A_{31} = D_{31}$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

O determinante de $D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 13$ (faço os cálculos).

Calculando o cofator A_{41}, que é dado por:

$A_{41} = (-1)^{4+1}.D_{41}$ ou $A_{41} = -D_{41}$

$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow D_{41} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9$ (faço os cálculos).

Assim, $det(M) = (-2)\cdot 3 + 3\cdot 13 + 1\cdot(-9) =$

$$= -6 + 39 - 9 = 24$$

$$\rightarrow det(M) = 24$$

Portanto, a alternativa correta é: letra c.

04) (**SOLUÇÃO**) Para facilitar vamos utilizar a primeira coluna (pois tem três zeros). Então, o determinante é:

$det(P) = 0\cdot A_{11} + (-1)\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41}$, como $a_{11} = 0$, $a_{31} = 0$ e $a_{41} = 0$, temos que:

$$det(P) = (-1)\cdot A_{21}$$

Calculando o cofator A_{21}, que é dado por:

$A_{21} = (-1)^{2+1}.D_{21}$ ou $A_{21} = -D_{21}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow D_{21} = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Agora, basta calcular o determinante de uma matriz 3x3.

$0 - 3x^2 + 0 = -3x^2$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix} \quad = 3 - (-3x^2) = 3 + 3x^2$$

$0 + 0 + 3 = 3$

Assim,

$$det(P) = (-1).(-)(3 + 3x^2) = 3x^2 + 3$$

Ou

$$det(P) = 3(x^2 + 1)$$

Portanto, a alternativa correta é: letra d.