Edcarlos Pereira

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Introdução

A função exponencial é uma ferramenta matemática presente na descrição e análise de muitos fenômenos da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos por meio de técnicas que utilizam a radioatividade, estudo de crescimento ou decrescimento de uma população etc.

O JOGO DA TORRE DE HANÓI

O jogo da Torre de Hanói foi criado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883, e vendido como brinquedo. Para criar o brinquedo, Lucas tomou como base uma antiga lenda indiana. Segundo esta lenda, o centro do mundo encontra-se sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Sob a cúpula do templo havia uma placa onde estavam fixados três pinos de diamantes. Num destes pinos o deus Brahma, ao criar o mundo, colocou sessenta e quatro discos de tamanhos diferentes, um sobre o outro e em ordem decrescente, isto é, do maior para o menor.

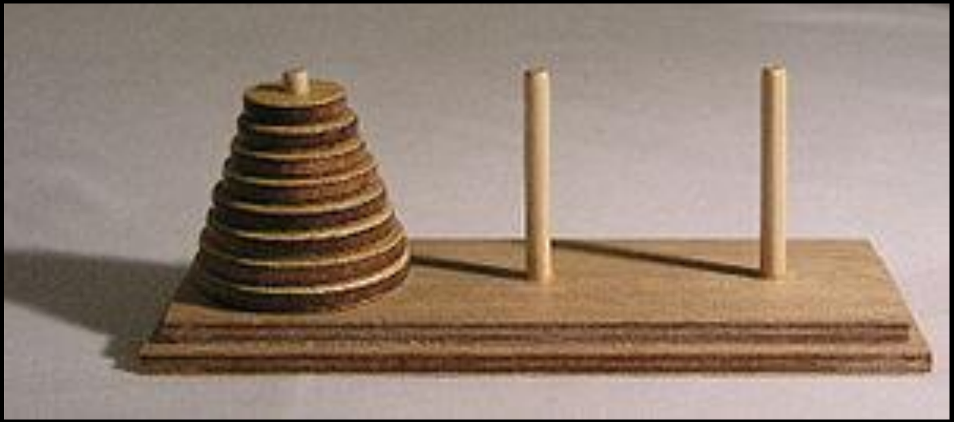
O JOGO DA TORRE DE HANÓI

Junto a torre o criador colocou um grupo de monges cuja função era mover os discos da haste original para as duas outras hastes, trabalhando dia e noite. Mas para realizar esta tarefa eles deveriam respeitar duas regras importantes: mover apenas um disco de cada vez; nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Segundo esta lenda, antes que os monges consigam terminar esta tarefa, o templo transformaria em pó e então o mundo acabará, com o estrondo de um grande trovão.

http://www.prof2000.pt/users/pjca/jogos_ficheiros/hanoi/torre%20de%20hanoi.html

Construindo uma Tabela



QUANTIDADE DE DISCOS	NÚMERO DE MOVIMENTOS
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
n	?

Veja também

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, quantas bactérias existirão depois de 3 horas, 10 horas e x horas?

Revisão de potenciação

- Potência com expoente natural

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

- Potência com expoente inteiro negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Potência com expoente racional

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriedades:

1ª) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2ª) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3ª) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4ª) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

5ª) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Exemplos:

a) $\left(2^3\right)^2$

b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$

c) $7^{\frac{2}{9}}$

d) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Função exponencial

Dado um número real **a** ($a > 0$ $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base *a* a uma função f de IR em IR* definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = (0,4)^x$

$$d)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Observação: As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x.
- Para $a < 0$ e $x = ½$, por exemplo, não haverá a^x.
- Para $a = 1$ e x qualquer número real, $a^x = 1$ (função constante)

Gráfico da função exponencial GeoGebra (software livre)

Agora iremos analisar a função $f(x) = a^x$ utilizando o software Geogebra, verificando quando a função é crescente e descrescente e em particular construiremos os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = (½)^x$.

Para fazer download. Acesse:

http://geogebra.softonic.com.br/download

Abrir arquivo do GeoGebra

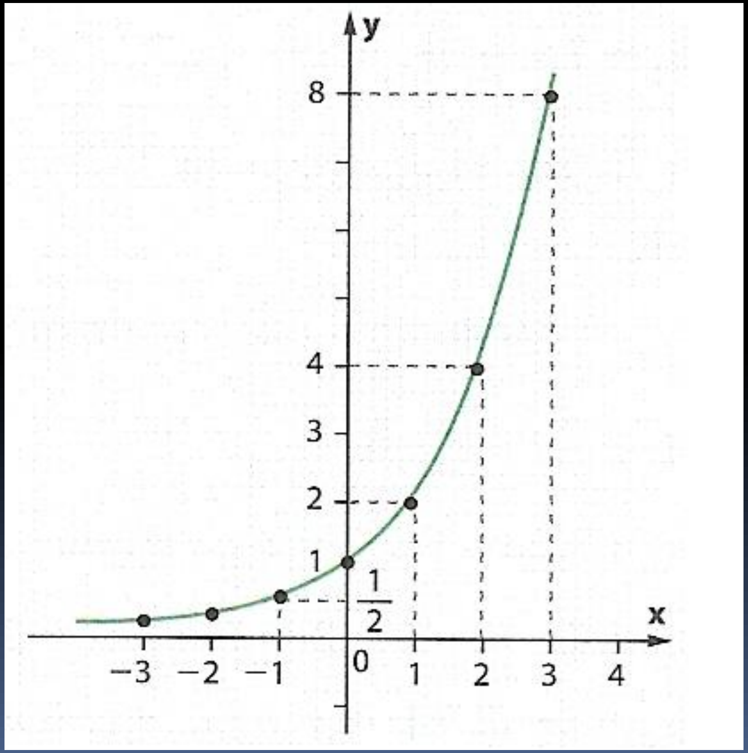
Gráfico da função exponencial

Vamos analisar os gráficos de duas funções exponenciais $f(x) = a^x$, a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$.

1ª) $a > 1$

$f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

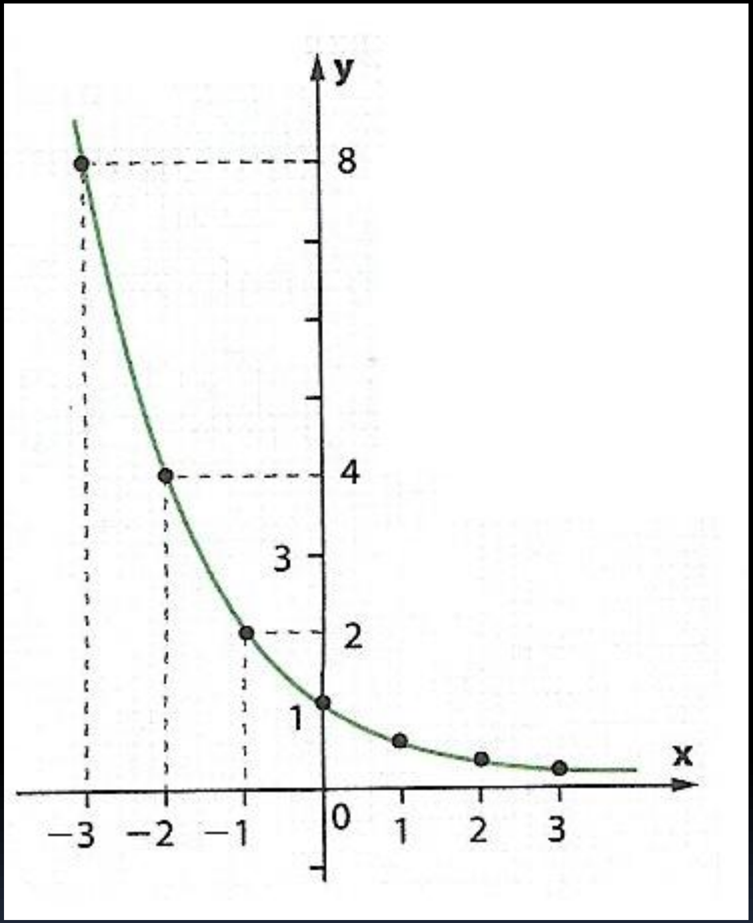
x	2^x	$y=2^x$
-3	2^{-3}	1/8
-2	2^{-2}	1/4
-1	2^{-1}	1/2
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8



2ª) 0 < a < 1

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ou \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$(½)^x$	$y=(½)^x$
-3	$(½)^{-3}$	8
-2	$(½)^{-2}$	4
-1	$(½)^{-1}$	2
0	$(½)^0$	1
1	$(½)^1$	1/2
2	$(½)^2$	1/4
3	$(½)^3$	1/8

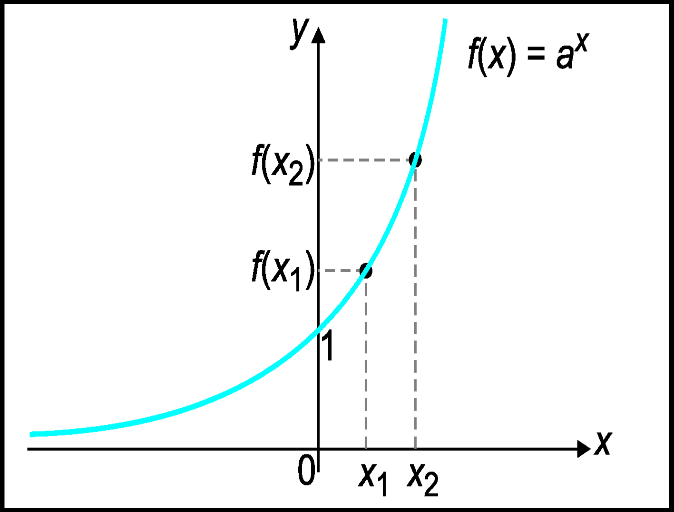


Observação: A função exponencial está definida para todo x real e tem por imagem o semieixo y > 0.

Conclusões da função exponencial

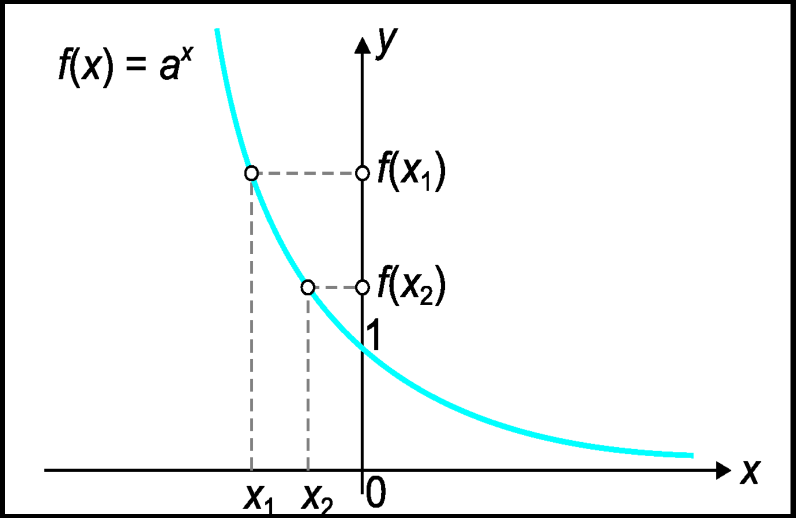
$f(x) = a^x$

Se a > 1



função crescente

Se 0 < a < 1



função decrescente

GeoGebra (software livre)

Agora iremos analisar a função $f(x) = a^x + b$ utilizando o software Geogebra, verificando quando a função é crescente, descrescente e quando o gráfico corta o eixo-y, mostrando a relação que há entre os coeficientes a e b da função.

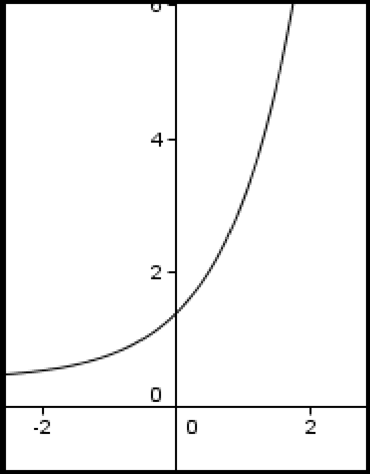
Para fazer download. Acesse:

http://geogebra.softonic.com.br/download

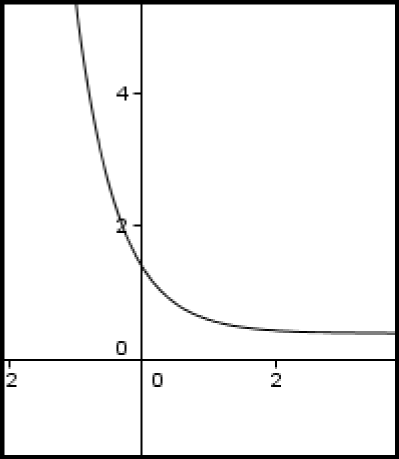
Abrir arquivo do GeoGebra

Conclusões extraída do GeoGebra

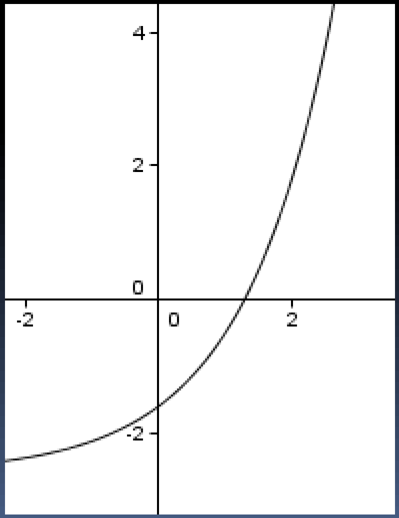
Se $a > 1$ e $b > -1$, a função crescente e o gráfico corta o eixo-y acima do eixo-x.



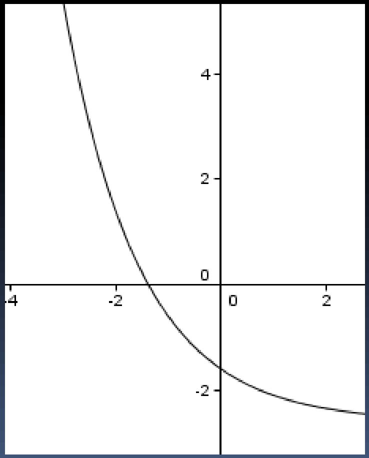
Se $0 < a < 1$ e $b > -1$, a função decrescente e o gráfico corta o eixo-y acima do eixo-x.



Se $a > 1$ e $b < -1$, a função crescente e o gráfico corta o eixo-y abaixo do eixo-x.



Se $0 < a < 1$ e $b < -1$, a função decrescente e o gráfico corta o eixo-y abaixo do eixo-x.



Equações exponenciais

Vamos primeiramente resolver equações exponenciais que podem ser transformadas numa igualdade de potências de mesma base.

Para resolvê-las, usamos o fato de que a função exponencial é injetiva, ou seja, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Exemplo:

Vamos resolver as equações abaixo:

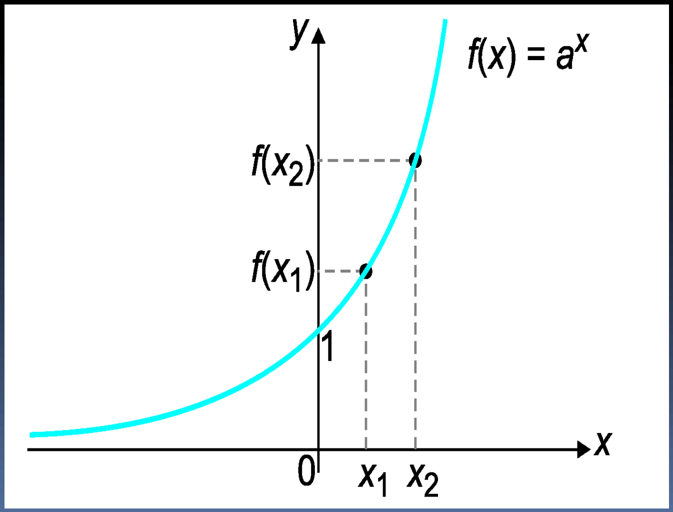
$a)\ 3^{x-1} = 81 \qquad b)\ 2^{x^2-3x+4} = 1$

Inequações exponenciais

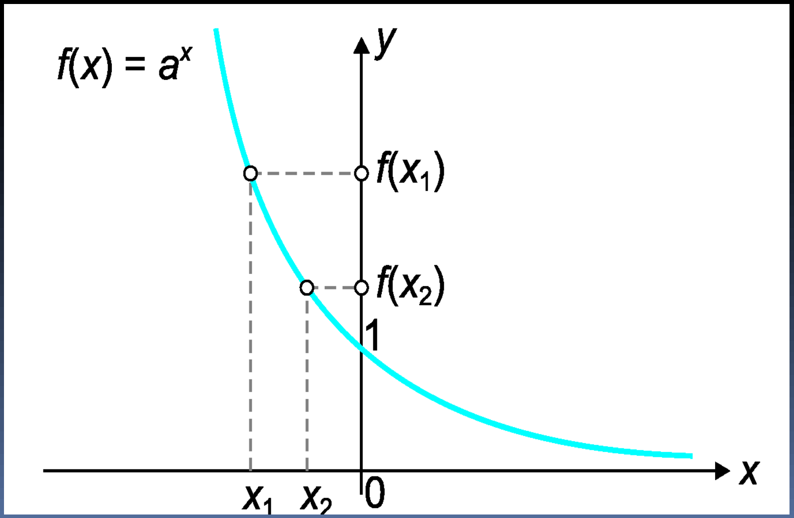
Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais.**

Já vimos que uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a.

Função crescente (a>1)



Função decrescente (0<a<1)



Dessa maneira, podemos concluir que:

- Quando a > 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$$

- Quando 0 < a < 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$$

Exemplo:

Vamos resolver as inequações abaixo:

$a)\ 5^{x+12} < 25$ $\qquad b)\ \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{8}$

Introdução

Função logarítmica

O estudo biológico da multiplicação de uma célula por divisões sucessivas é uma situação concreta que revela a importância do conhecimento dos logaritmos.

O infográfico representa o crescimento do número n de células em função da quantidade t de dias. Convencionou-se a notação t=0 para a observação inicial, correspondente a n=1.

Tempo (t)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de células (n)	1	2	4	8	16

Observe que $n = 2^t$ é a lei de formação da função que modela essa situação.

Com base nessa lei, podemos calcular a quantidade de dias para que tenhamos 16.384 células. Veja:

$$n = 2^t \Rightarrow 16.384 = 2^t \Rightarrow t = 14$$

O valor de t é 14, pois 2 = 16.384. Dizemos que 14 é o **logaritmo** de 16.384 na base 2.

Definição de logaritmo de um número

Dados *a* e *b*, números reais positivos ($a>0$ e $b>0$), com $a \neq 1$, o logaritmo de *b* na base *a* é o número real *x* tal que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. O número *b* é conhecido por logaritmando.

Exemplo:

$a)$ Quanto vale a se $\log_a 81 = 4$?

$b)$ Calcular o valor de b na expressão $\log_{10} b = 0$.

Propriedades operatórias dos logaritmos e mudança de base

Logaritmo do produto de dois números positivos b e c, em base a, com a>0 e a $\neq$ 1, é dado por:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo do quociente de dois números positivos b e c, em base a, com a>0 e a $\neq$ 1, é dado por:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo de uma potência, em base a, com a>0 e a $\neq$ 1, é dado por:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Exemplo:

Utilizando as propriedades, simplificar a expressão: log50 + log20 – log8.

Função logarítmica

Uma função f: $IR_+^* \rightarrow$ IR chama-se função logarítmica quando existe um número real a, com a > 0 e a $\neq$ 1, tal que f(x) = log x para todo x $\in$ IR_+^*.

Exemplo:

$a) \quad f(x) = \log_3 x$

Gráfico da função logarítmica GeoGebra (software livre)

Agora iremos analisar o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ utilizando o software Geogebra, verificando quando a função é crescente e descrescente e em particular construiremos os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $f(x) = \log_{1/3} x$.

Para fazer download. Acesse:

http://geogebra.softonic.com.br/download

Abrir arquivo do GeoGebra

Resoluções de problemas

1) Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, quantas bactérias existirão depois de 3 horas, 10 horas e x horas?

2) Encontre lei de formação que modela a quantidade mínimo de jogadas possíveis na torre de Hanói?

3) Estima-se que a população de um país aumente de acordo com a lei $P(t) = 15.000(1,035)^t$, sendo t anos. Adotando $(1,035)^{10} = \sqrt{2}$, determine a população desse país daqui a 80 anos?

4) Um aplicação financeira obedece a lei $M(t) = 50.000 \cdot (1,1)^t$, em que M(t) é o montante final após t meses. Determine o montante final após 6 meses?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

- Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

- Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.