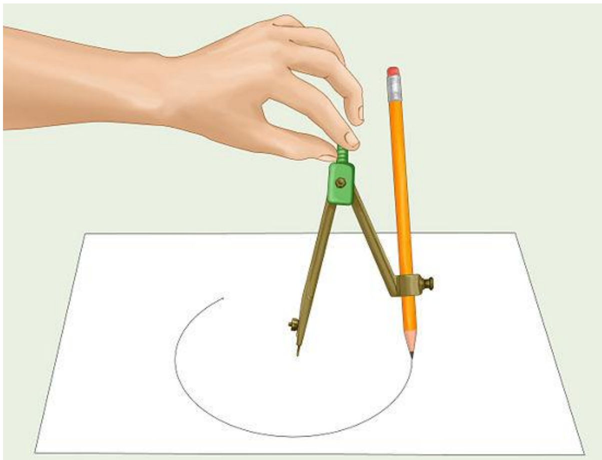
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
ALAGOAS

Campus Marechal Deodoro

Apostila de Matemática II

2° Anos

Professor: Edcarlos Pereira



IFAL – 2016

SUMÁRIO

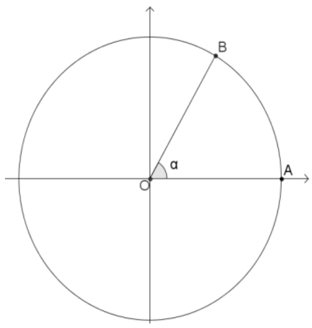
Conteúdo

Trigonometria e Suas Aplicações - Parte 2

Introdução

Estudamos o seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Agora, iremos estender estes conceitos na circunferência trigonométrica.

Situação-problema

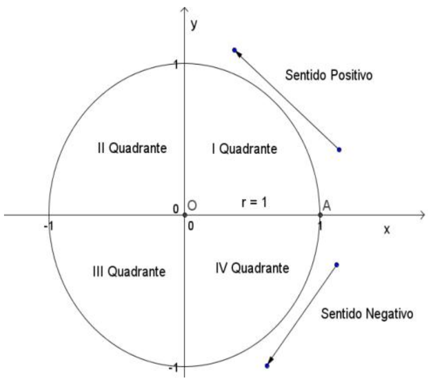


No plano da órbita circular de um satélite ao redor da Terra é associado um sistema cartesiano cuja unidade adotada nos eixos é o quilômetro, e a origem O é o centro a Terra e também a órbita, conforme mostra o esquema ao lado, em que A(900,0)

Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção da órbita com os eixos cartesianos?

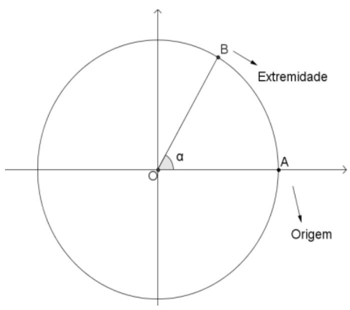
Sabendo que em um determinado instante a posição do satélite é o ponto $B(450, 450\sqrt{3})$ determine a medida α do ângulo agudo AÔB.

Circunferência Trigonométrica



Denomina-se circunferência trigonométrica a circunferência orientada cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

Arcos Côngruos (congruentes)



Todos os arcos no círculo trigonométrico possuem determinações, isto é, tem origem e extremidade.

Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de arcos côngruos.

Exemplos:

a) O arco de 30° ($\pi/6$) é congruente ao arco de 390° ($13\pi/6$), isto é 30°≡ 390°.

b) O arco de 45° ($\pi/4$) é congruente ao arco de 405° ($9\pi/4$), isto é 45°≡ 405°.

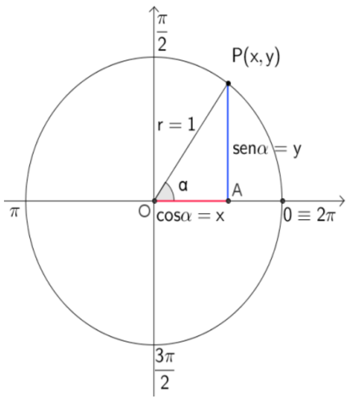
c) O arco de 60° ($\pi/3$) é congruente ao arco de 420° ($7\pi/3$), isto é 60°≡ 420°.

Formula geral do arcos côngruos

Se um arco mede α graus, podemos expressar todos os arcos côngruos a ele da seguinte forma: $\alpha + 360^{\circ}.k,\ k \in Z$. Caso a medida do ângulo do arco seja dada em radianos, representamos por: $\alpha + 2\pi.k,\ k \in Z$.

Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica

Consideremos P(x,y) um ponto da circunferência trigonométrica, ponto extremo do arco de medida α rad. Nessas condições, definimos:



$$sen\alpha = y$$

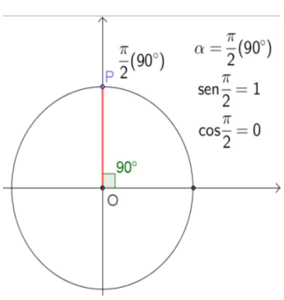
$$\cos\alpha = x$$

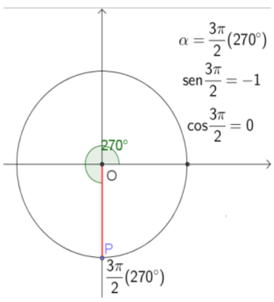
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha},\quad (com\ \alpha \neq 0)$$

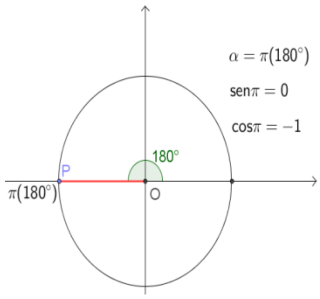
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

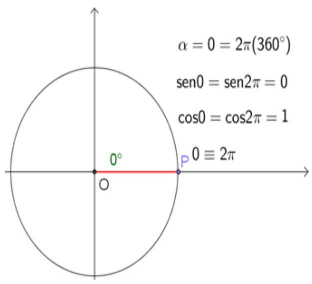
Valores notáveis do seno e do cosseno

Observe nas figuras a seguir nos arcos $0 \equiv 2\pi$, $\pi/2$, π e $3\pi/2$.

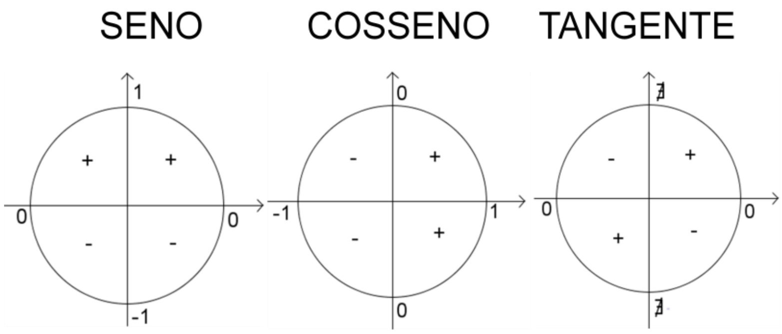






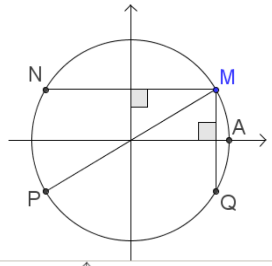


Sinais do seno, cosseno e tangente.

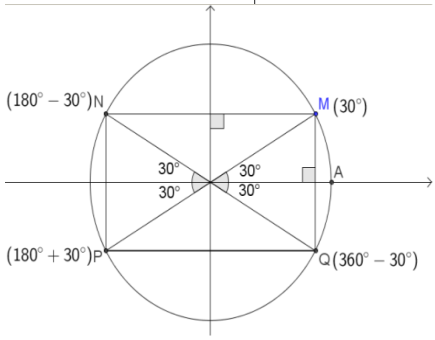


Simetrias

Dado um ponto M, na circunferência, podemos encontrar três pontos (N, P, Q) simétricos ao ponto M.
Veja o esquema ao lado:

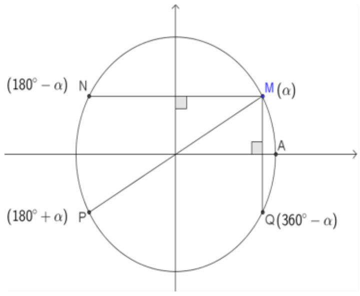


Se o ponto M é a extremidade do arco AM medindo 30°. Então, temos:

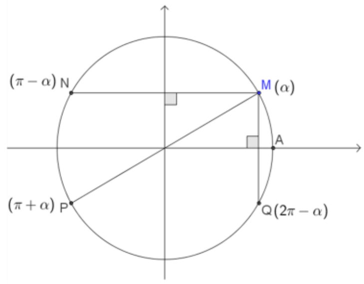


Generalizando, temos:

Sendo α uma medida em grau.



Sendo α uma medida em radiano.

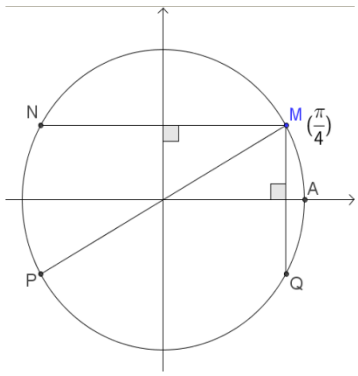


Redução ao 1° Quadrante do seno e do cosseno

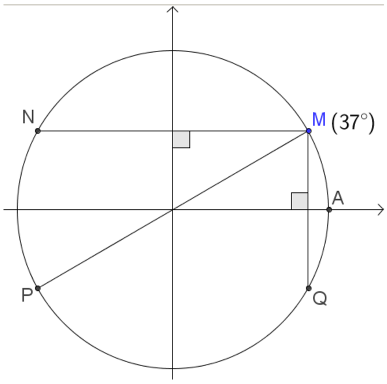
$$sen(180^\circ - \alpha) = sen(\alpha) \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$sen(360^\circ - \alpha) = -sen(\alpha) \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$sen(180^\circ + \alpha) = -sen(\alpha) \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

Exemplos:

1. O ponto M da figura está associado à medida π/4 rad. Determine as medidas x (com 0 ≤ x ≤ 2π) associados aos pontos N, P e Q.



2. O ponto M, da circunferência trigonométrica ao lado, está associado à medida 37°. Determine as medidas x (com 0 ≤ x ≤ 360°) associados aos pontos N, P e Q.



Equações trigonométricas

Equações do tipo senx=k, cosx=k ou tgx=k, sendo k uma constante real, são chamadas de equações trigonométricas imediatas.

Exemplos:

1. Determine x nos casos seguintes:

a) 0° ≤ x < 360° tal que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) 0 ≤ x < 2π tal que $\cos x = 0$

c) x ∈ R tal que $senx = -1$

d) x ∈ R tal que $tgx = 1$

Adição de arcos e arcos duplos

Fórmulas de adição de arcos

$$I)\ sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a$$

$$II)\ sen(a-b) = sena \cdot \cos b - senb \cdot \cos a$$

$$III)\ \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$$

$$IV)\ \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb$$

$$V)\ tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

$$VI)\ tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

Exemplos:

1) Calcular cos15°.

2) Calcular sen105°.

3) $(UFPR)$ A expressão $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

é equivalente a:

$a)$ $2\cos x$

$b)$ $\cos x$

$c)$ $senx+\cos x$

$d)$ $senx-\cos x$

$e)$ $\cos x - senx$

Funções Trigonométricas

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo (ou arco) de x radianos.

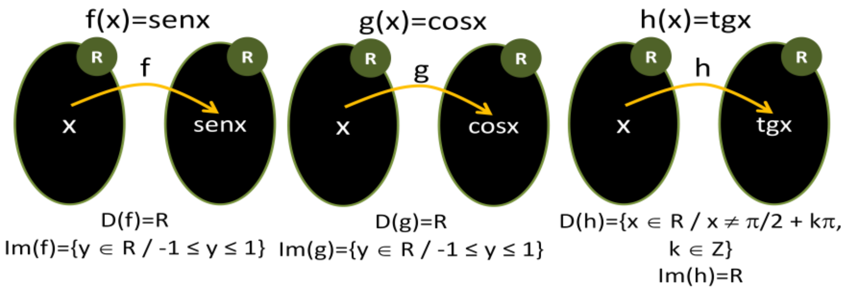
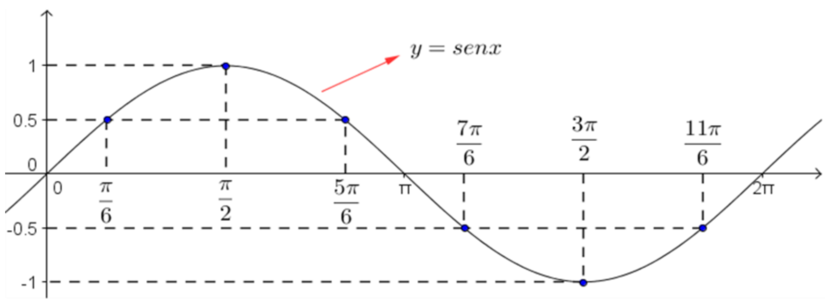


Gráfico da função f(x)=senx

Veja abaixo o gráfico da função seno:

x	0	π/6	π/2	5π/6	π	7π/6	3π/2	11π/6	2π
y=senx	0	0,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-0,5	0



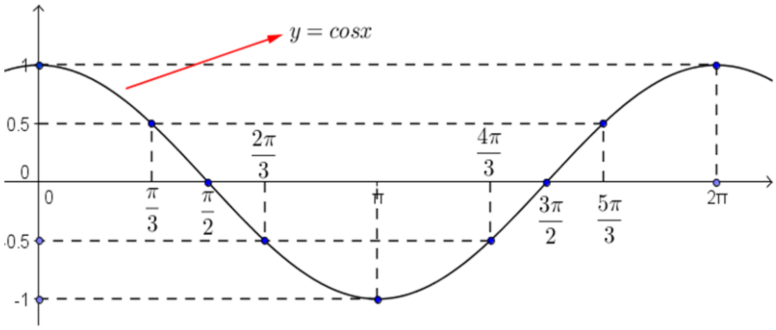
D(f)=R

Im(f)={y ∈ R / -1 ≤ y ≤ 1}

Gráfico da função g(x)=cosx

Veja abaixo o gráfico da função cosseno:

x	0	π/3	π/2	2π/3	π	4π/3	3π/2	5π/3	2π
y=cosx	1	0,5	0	-0,5	-1	-0,5	0	0,5	1



D(g)=R

Im(g)={y ∈ R / -1 ≤ y ≤ 1}

Período das funções seno e cosseno

Sejam as funções trigonométricas: y=a+b·sen(mx+q) ou y=a+b·cos(mx+q), em que *a*, *b*, *m* e *q* são números reais, com b≠0 e m≠0, o período e dado por: $p = \frac{2\pi}{|m|}$

Exemplos:

a) O período da função y=3+2·sen(2x+4) é π, pois: $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) O período da função y=2·cos(-4x+1) é π/2, pois: $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Resoluções de Problemas

1) (Unifor-CE) O arco α mede 7.632º. O arco β, tal que 0 < β < 360º, é côngruo a α. A medida de β, em radianos, é:

$a)\frac{\pi}{2}$ $b)\frac{\pi}{5}$ $c)\frac{\pi}{3}$ $d)\frac{2\pi}{5}$ $e)\frac{2\pi}{7}$

2) (Unicamp-SP) O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá 1/4 de volta em um mostrador graduado de 0º a 360º. No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição 0º. Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?

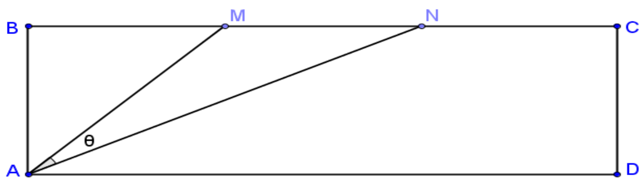
a) 270° b) 160° c) 220° d) 140° e) 20°

3) (PUC-MG) Os ângulos (em graus) θ entre 0° e 360° para os quais senθ=cosθ.
a) 45° e 90° b) 45° e 225° c) 180° e 360° d) 45°, 90° e 180° e) 90°, 180° e 270°

4) (UFP/PSE) Sabendo que $senx - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, podemos afirmar que sen2x é:

$a)\frac{13}{16}$ $b)\frac{3}{16}$ $c)\frac{\sqrt{13}}{16}$ $d)-\frac{13}{16}$ $e)\frac{3}{4}$

5) (UFMS) A figura abaixo mostra um retângulo ABCD onde AB=BM=MN=NC. Calcule 6tgθ+51.



6) (Ufam) Dada a função f: R $\rightarrow$ R definida por f(x)=cos4x·cos2x+sen4x·sen2x. Então o seu período em radianos é:

$a)\ \frac{3\pi}{2}$ $\quad b)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad c)\ 2\pi$ $\quad d)\ \pi$ $\quad e)\ \frac{\pi}{3}$

7) Construa os gráficos das funções abaixo e determine seu período, domínio e imagem:

$a)\ f(x) = 3 \cdot senx \qquad b)\ f(x) = 1 + \cos x \qquad c)\ f(x) = -2 + \cos 4x$

8) (Vunesp - Modificado) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão $P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right)$ em que t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação (t=0) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante t. Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta e qual é a sua profundidade?

Matrizes e Suas Aplicações

Introdução

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns exemplos:

Os 7 Homens mais ricos do mundo (2013)

Ordem	Nome	Fortuna	País
1	Bill Gates	US $ 73.4 Bi	EUA
2	Carlos Slim	US$ 69.5 Bi	México
3	Warren Buffett	US$ 60.3 Bi	EUA
4	Amâncio Ortega	US$ 55.6 Bi	Espanha
5	Ingvar Kamprad	US$ 54.5 Bi	Suécia
6	Charles Koch	US$ 45.6 Bi	EUA
7	David Koch	US$ 45.6 Bi	EUA

Fonte: TOP10+. Disponível em: www.top10mais.org. Acesso em: 19/08/2013

Outra tabela

Olimpíadas de Londres 2012

Ordem	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º	Estados Unidos	46	29	29	104
2º	China	38	27	23	88
3º	Reino Unido	29	17	19	65
22º	Brasil	3	5	9	17

Veja também

Uma dona de casa precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja a tabela com os preços pesquisados.

	Produto			
Supermercado	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Essa consumidora precisa de:

Produto	Quantidade
farinha	4 kg
açúcar	3 kg
leite	3 ℓ
Ovos	1 dz

Qual dos supermercados ela gastaria menos?

Definição

Chamamos de matriz *mxn* qualquer tabela, formada por m·n elementos (informações) dispostos em m linhas e n colunas.

Observação: Uma matriz pode ser escrita entre colchetes ou entre parênteses.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix}$$ é uma matriz do tipo 2x4, pois tem 2 linhas e 4 colunas

$$\begin{bmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{bmatrix}$$

Representa os preços pesquisados nos dois supermercados pela dona de casa.

Outros exemplos:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$ é uma matriz do tipo 3x3, pois tem 3 linhas e 3 colunas.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$ é uma matriz do tipo 3x1, pois tem 3 linhas e 1 colunas, recebe o nome especial de matriz **coluna**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$ é uma matriz do tipo 1x3, pois tem 1 linhas e 3 colunas, recebe o nome especial de matriz **linha**.

Representação dos Elementos da Matriz

Um elemento qualquer é representado por a_{ij}, onde i representa a linha e j a coluna, onde o elemento se encontra localizado em uma matriz A.

Exemplo: $$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- o elemento 2 está na linha 1 e coluna 1; indicamos $a_{11}= 2$.
- o elemento 4 está na linha 1 e coluna 2; indicamos $a_{12}= 4$.
- segue, $a_{13}= -1$, $a_{21}= 6$, $a_{22}= 0$ e $a_{23}= 9$.

Representação de uma matriz

Representamos genericamente uma matriz A do tipo *mxn* da seguinte maneira:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para simplificar, utilizaremos $A = (a_{ij})_{mxn}$.

Exemplo 1:

Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3x2}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Resolução:

Primeiro, escreva a matriz A genericamente:

Primeiro, escreva a matriz A genericamente:

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Depois, calcular o valor de cada elemento a_{ij} pela lei $a_{ij} = i + j$.

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{12} = 1 + 2 = 3$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{31} = 3 + 1 = 4$

$a_{32} = 3 + 2 = 5$

Daí, temos a matriz: $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Algumas matrizes especiais

- Matriz quadrada

É uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

$A = (7)$ é uma matriz 1 x 1 ou, simplesmente, matriz de ordem 1.

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de ordem 2.

$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ matriz de ordem 3.

Observação:

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que i = j formam a diagonal principal na matriz, e os elementos a tais que i + j = n + 1 formam a diagonal secundária.

diagonal secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

- Matriz triangular:

É uma matriz quadrada, cujos elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz transposta:

Dada uma matriz A, chamamos a matriz transposta A^t à matriz obtida de A trocando-se, ordenadamente, suas linhas por colunas.

Exemplo:
A transposta de $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -2 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ é $A^t{}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- Matriz Identidade

É uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a zero.

Exemplos: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Matriz nula

É uma matriz com todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula, do tipo 2 x 3, também indicada por 0_{2x3}.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais se, e somente se, tem seus elementos correspondentes iguais.

Exemplos 1:

Determine x e y, sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} x+y & 4 \\ 3 & 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Resolução

Devemos ter:

$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ Resolvendo o sistema, encontramos x = 5 e y = 2.

Exemplos 2:

Sabendo-se que: $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$

determine os valores de: a, b, c e d.

Resolução

Note que,

- ❑ $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.
- ❑ $a + b = 9 \Rightarrow a + 3 = 9 \Rightarrow a = 6$.
- ❑ $b + c = -1 \Rightarrow 3 + c = -1 \Rightarrow c = -4$.
- ❑ $2a - 3d = 18 \Rightarrow 2.6 - 3d = 18 \Rightarrow d = -2$.

Adição de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem mxn, denominamos soma da matriz A com a matriz B à matriz C, cujos elementos são obtidos quando somamos os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indicamos: C = A + B

Exemplo. Sejam as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz C = A + B, basta somar os elementos correspondentes de A e B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 2+3 & 4+5 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Subtração de matrizes

Definição: A diferença entre duas matrizes, A e B, de mesmo tipo é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, A – B = A + (-B).

Exemplo:
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz A e k um número real, então k.A é uma matriz do tipo *mxn* obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Exemplo:

$$Se\ A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad k = 3, \quad então:$$

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 & 3.6 \\ 3.(-2) & 3.2 \\ 3.3 & 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 6 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Voltemos ao exemplo da introdução:

Uma dona de casa precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja a tabela com os preços pesquisados.

Supermercado	Produto			
	Farinha (R$/kg)	Açúcar (R$/kg)	Leite (R$/ℓ)	Ovos (R$/dz)
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Essa consumidora precisa de:

Produto	Quantidade
farinha	4 kg
açúcar	3 kg
leite	3 ℓ
Ovos	1 dz

Qual dos supermercados ela gastaria menos?

Para saber em qual dos supermercados ela gastaria menos, podemos calcular:

Supermercado A→ (1,72).4+(1,90).3+(1,55).3+(3,00).1=20,23

Supermercado B→ (1,76).4+(1,24).3+(1,72).3+(3,94).1=19,86

Também é possível efetuar esse cálculo por meio de matrizes. Veja:

$$P=\begin{pmatrix}1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00\\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94\end{pmatrix}\ e\ Q=\begin{pmatrix}4\\3\\3\\1\end{pmatrix}.\ Queremos:\ C=P.Q$$

Os elementos de uma linha de P são multiplicados, ordenadamente, pelos correspondentes elementos da coluna de Q e, depois, os produtos são somados

$$\begin{matrix} P & \cdot & Q & = & C \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00\\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1{,}72).4+(1{,}90).3+(1{,}55).3+(3{,}00).1\\ (1{,}76).4+(1{,}24).3+(1{,}72).3+(3{,}94).1\end{pmatrix}$$

Logo,

$$C=\begin{pmatrix}20{,}23\\19{,}86\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{Supermercado A.}\\ \text{Supermercado B.}\end{matrix}$$

Portanto, no supermercado B a dona de casa gastará menos.

Definição de multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes A = $(a_{ij})_{mxp}$ e B = $(b_{ij})_{pxn}$, o produto de A por B é a matriz C = $(c_{ij})_{mxn}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento de linha *i* de A pelo correspondente elemento da coluna *j* de B.

Observação: O produto da matriz A por B, só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linha de B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}_{2x3}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}_{3x2}$

determinar A·B.

Note que, o número de colunas de A é igual a número linhas de B. Então, A.B = C.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 & 2\cdot 1 + 0\cdot 4 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3 & 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$

Resoluções de Problemas

1) (PUC-MG) Seja A a matriz $A=(a_{ij})_{2x3}$, cuja lei de formação é dada abaixo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & se\ i \neq j \\ 2i - 3j, & se\ i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

$a) A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $b) A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

$c) A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $d) A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

3) O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência de pessoas na casa, em um final de semana, e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

2) (UFC-CE) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de ordem 2x2.
Então, pode-se afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ é igual a:

$a) \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $d) \begin{pmatrix} n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$

$b) \begin{pmatrix} n & n^2 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ $\quad$ $c) \begin{pmatrix} 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $e) \begin{pmatrix} n & n \\ 0 & n \end{pmatrix}$

3) O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência de pessoas na casa, em um final de semana, e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

$$\begin{array}{rc} & \text{rapazes} \quad \text{moças} \\ \begin{array}{r} \text{sábado} \\ \text{domingo} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{80} & \mathbf{60} \\ \mathbf{?} & \mathbf{75} \end{pmatrix} \end{array}$$

O gerente se esqueceu de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias havia sido a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes R$ 15,00 e para moças é R$ 12,00:

a) represente, por meio da multiplicação de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa de cada dia e determine o valor do campo que ficou sem ser preenchido.

4) A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos aluno A, B e C nas provas de Português, Matemática e Conhecimentos Gerais em um exame vestibular:

	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 3 (em português), 2 (em matemática) e 1 (em conhecimentos gerais). Determine a pontuação de cada um por meio de multiplicação de matrizes?

Referências

Barroso, Juliane Matsubara, Conexões com a matemática, obra coletiva concebida, volume 1, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Dante, Luiz Roberto, Matemática: contexto e aplicações, volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

Gelson Iezzi, et al, Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel, Matemática – Paiva, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.